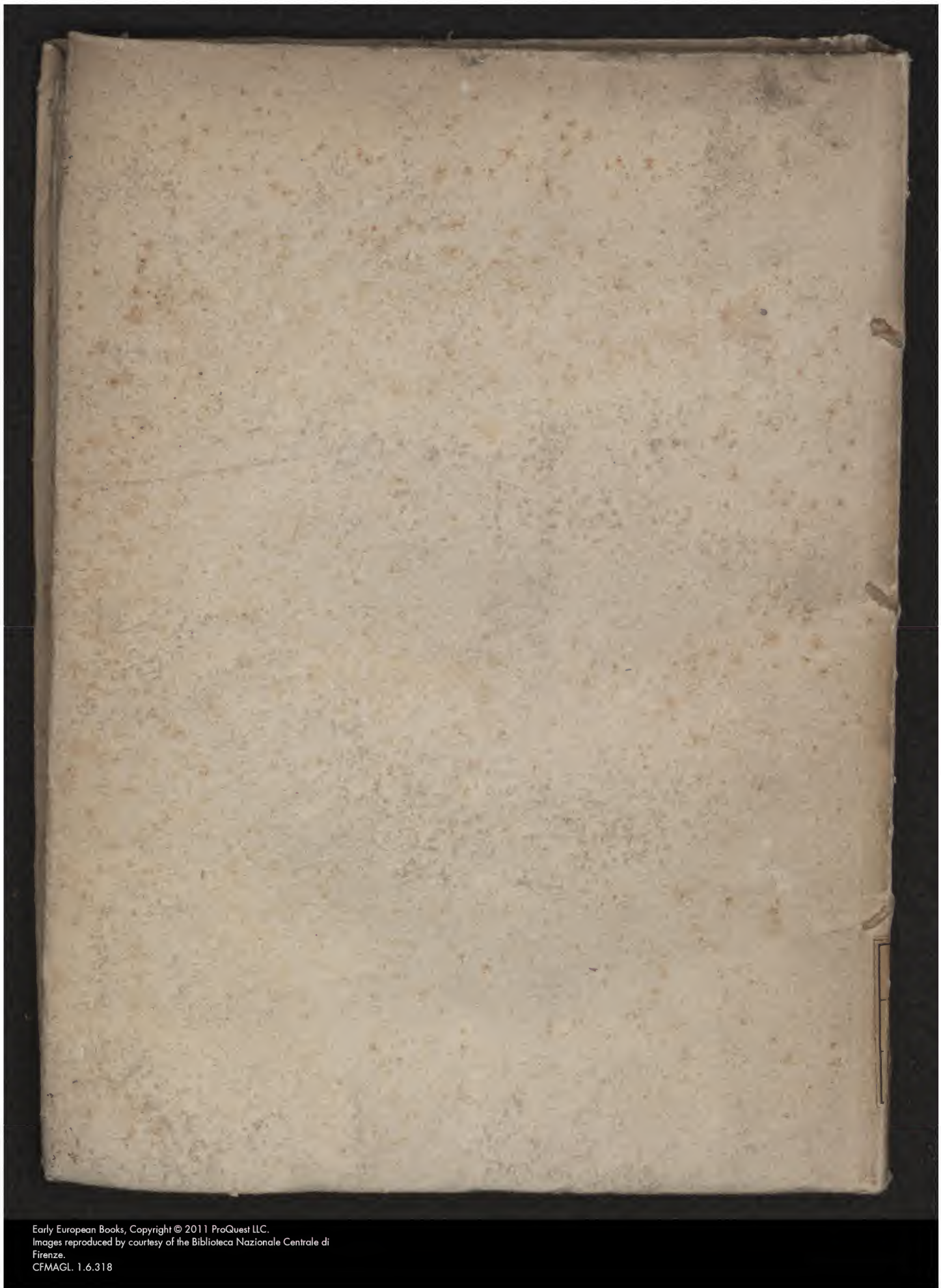
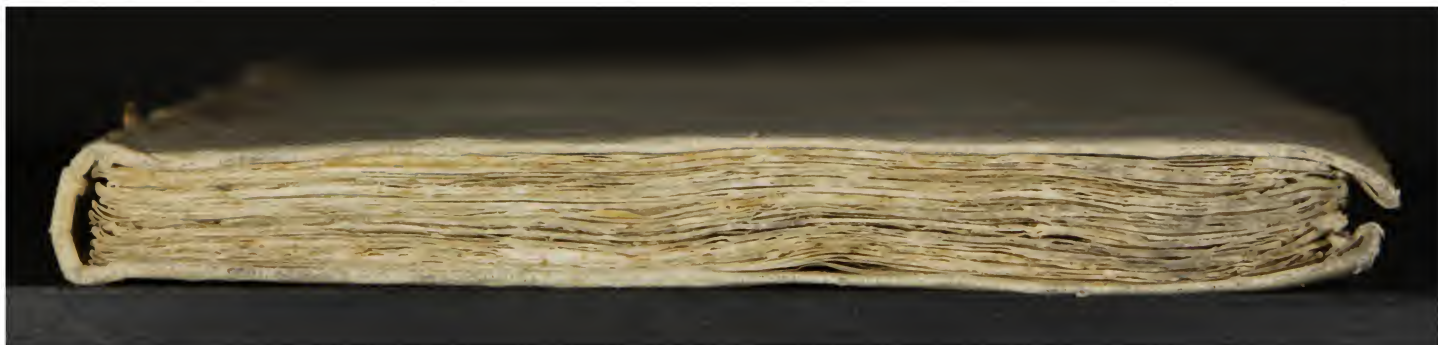


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL 1.6.318





Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.318



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.318



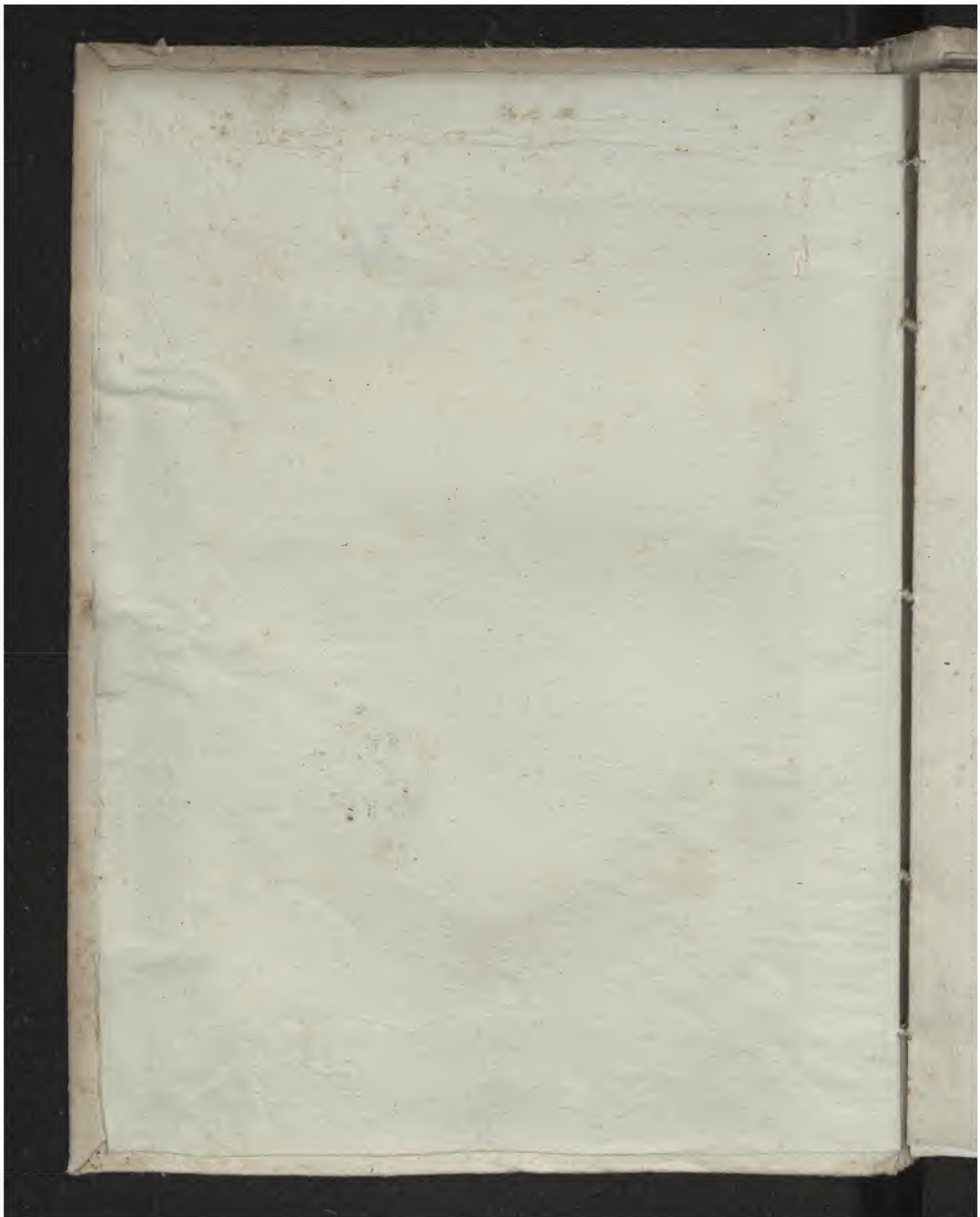
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL 1.6.318

1 K.6

1. 6. 318

XI

MENG



NOVÆ
QVADRATVRÆ
ARITHMETICÆ.

SEV

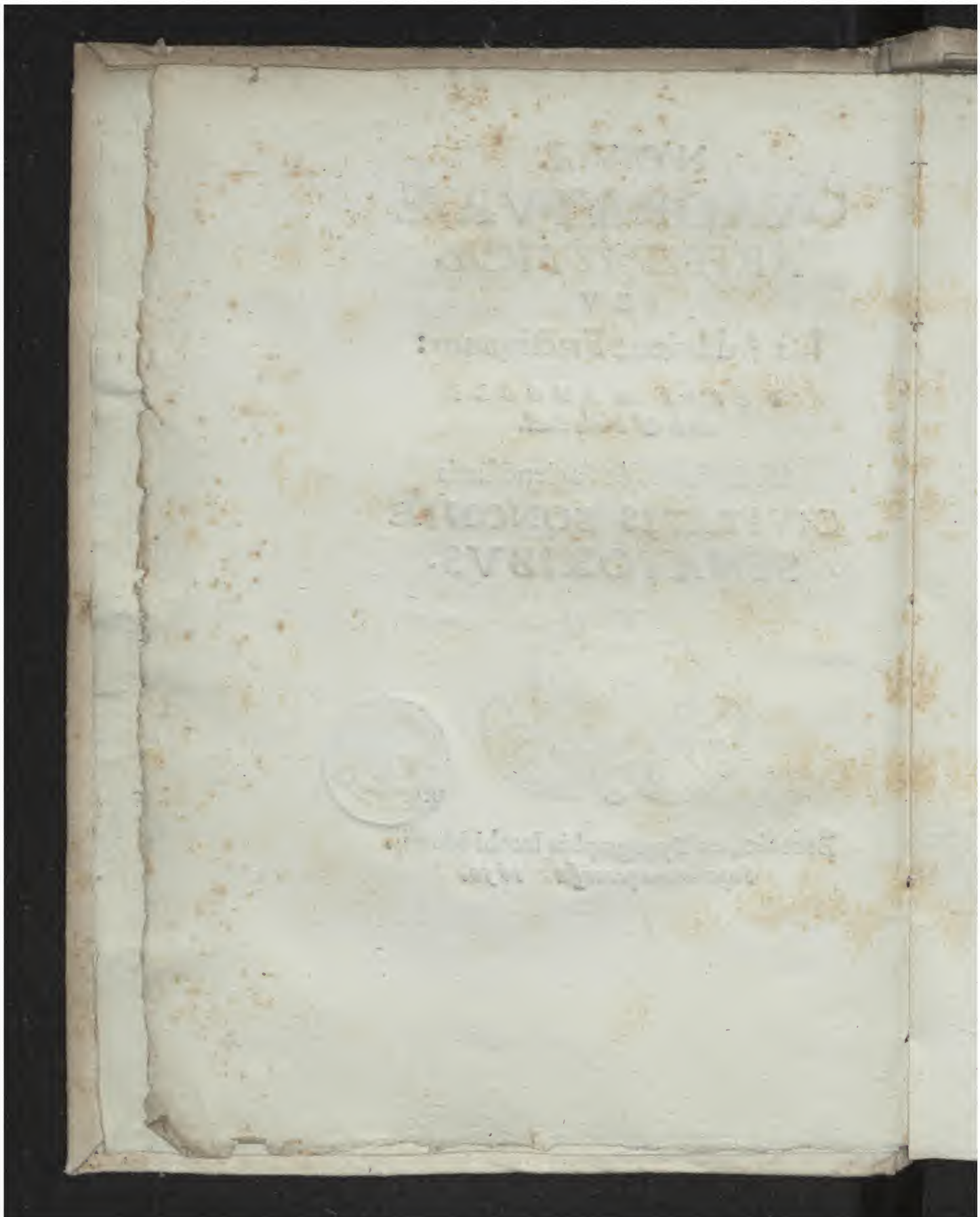
De Additione Fractionum:

PETRI MENGOLI
Art. & Phil. Doct.

Illustrissimis, & Sapientissimis
CIVITATIS BONONIÆ
SENATORIBVS.



Bononiæ, ex Typographia Iacobi Montij,
Superiorum permissu. 1650.



ILLVSTRISSIMI PATRES



Ereor quoniam vestris auri-
bus, Patres Amplissimi. con-
sona hæc numerorum con-
geries dissonare videat-
ur: at innumeris meritis
innumeram numerorum seriem deberi
quis deneget? Arenas maris, stellarum
numerus, nivis exagonæ multitudi-
nem examinandam contemnerem, dum
vestræ fides humanitati infinitum me-
tiri minimè dubitavi. Fronti nunquam
melior successit sudor, calamus potiori
nunquam vndavit atramento, eo quod
vestro nomini, meo veluti numini con-
secratur. Hæ meæ quæquæ sint, inte-
gritatis fractiones, quia minimæ sunt
quantitatis, ipsum munus exile profi-
tentur; quia verò in singulis disposi-
tionibus.



tionibus infinitæ colliguntur, vestrae
non minus humanitatis, quam obse-
quij mei numerant argumenta. Ve-
ster labor est, Patres Illustriss. dum
meis lucubrationibus munificentissimo
imperio laborastis: vester, inquam, la-
bor est, cui vestri cæsus, nostrique sæ-
culi Apollo amplissimæ lucis impen-
dium erogavit. Spinosa hæc Mathe-
seos dumeta è rigidis acutissimæ artis
spinis verecundiæ meæ rosas collecturi
respicere ne dedignemini. Valete.

Illustriss. DD. VV.

Servus humillimus
Petrus Mengolus.

PRÆFATIO



*Editanti mihi persape Archi-
medis parabola Quadratu-
ram, propterquam infinita
triangula in continuè qua-
drupla proportionem existen-
tia certos limites quantitatis non excedunt;
occurrit vniuersalis illa Quadratura eiusdem
argumenti occasione a Geometris demonstrata,
qua magnitudines infinita continuam quamli-
bet proportionem maioris inaequalitatis pos-
sidentes in præsinitas homogeneas quantitates
colliguntur. Admirabile sanè Theorema:
cuius contemplatione in eam quaestionem indu-
ctus sum, vtrum magnitudines ea quacunq;
lege dispositæ, vt aliqua possit assumi minor
qualibet proposita, vel vt deficientes in infini-
tum euanescant, infinita composita omnem
propositam quantitatem valeant superare.*

*In huiusmodi causæ experimentū Arithme-
ticas fractiones tētare aggressus, eas ita disposui,
vt singulas unitates singulis post unitatem nu-
meris*

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$

meris denominarem, in qua quidem dispositione sumi potest magnitudo minor qualibet assignata, & propterea ipsæ magnitudines ad ordinis incrementum quantitate decrecentes in infinitum evanescent.

Causam igitur in assumptæ dispositionis terminis proponens quærebam, utrum unitates denominata singulis numeris post unitatem in infinitum dispositæ, & aggregatæ infinitam aliquam, vel finitam componerent extensionem. Pro finita extensione respondendum videbatur; quod numerorum, & fractionum contrariæ sint potestates, numerorum quidem in multiplicatione, qua magnitudines versus infinitum progrediuntur, fractionum vero in divisione, qua res ad ipsa indivisibilia reduci-
tur: aggregati autem numeri superant quamlibet propositam quantitatem; ergo à contrario sensu aggregatæ fractiones non videntur posse quamlibet propositam magnitudinem excedere. Hoc sophisma toto ferè mense fuit expectatio-
nis

nis argumentum, quod pro hac parte Geometricam in causa ferre possem sententiam: atqui dum processum demonstrationis examino, iudicium in alterius partis fauorem conuertitur.

Ea est ratio, quia in propositis fractionibus aequales magnitudines numeris Arithmetice dispositis dominantur, & propterea tres consequentes, utpote A, B, C , $\frac{A}{2} \quad \frac{B}{3} \quad \frac{C}{4}$ sunt Harmonice disposita, & A , ad C , eandem habet proportionem, quam excessus, A, B , ad excessum B, C : est autem A , maior C ; ergo excessus A, B , maior est excessu B, C ; & aggregatum A, C , maius duplo B ; & aggregatum ex ternis A, B, C , maius triplo media B . Hoc igitur argumento fractiones in proposita dispositione sumpta terne à prima sunt maiores

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{13} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{16}$$

triples medijs: & media sunt unitates denominata numeris à ternario multiplicatis $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}$; & earundem tripla sunt $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, qua eodem, quo supra argumento terne sunt maiores.

maiores triplis medijs. Ergo fractiones propo-
 sita dispositionis assumpta totidem semper se-
 cundum numeros proportionis continuè subtri-
 pla 3, 9, 27, 81, singulas unitates excedunt.
 Possunt autem sumi, pro quouis assignato
 numero, totidem in continua proportionem sub-
 tripla numeri à ternario, iuxta quorum ag-
 gregatum sumpta fractiones dispositionis pro-
 posita ipsum assignatam numerum superabunt.
 Ergo proposita fractiones in infinitum dispo-
 sita, & aggregata infinitam extensionem va-
 lent implere.

Sit exempli gratia numerus assignatus 4:
 & sumantur à ternario quatuor continuè
 proportionales in subtripla 3, 9, 27, 81, quo-
 rum summa 120: igitur sumpta fractiones in
 multitudine numeri 120 superant assigna-
 tum numerum 4; nam tres prime superant tri-
 plum $\frac{1}{3}$, videlicet unitatem: nouem deinceps
 superant triplum aggregati $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, videlicet
 aggregatum $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; sed huiusmodi aggrega-
 tum superat unitatem, ut ostendi; ergo nouem
 deinceps superant unitatem: & propter eam-
 dem

dem demonstrationem 27, & 81 subsequen-
tes singulas unitates excedunt.

Hinc duo Corollaria processere. Primum,
quòd eadem dispositio à quocunque ordinetur
principio in infinitum extenditur; utpote si
dispositarum fractionum prima sit $\frac{1}{5}$, & alia
deinceps adhuc ipsam dispositionem propositum

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{13} \quad \&c.$$

quemuis numerum superare posse: finitum
enim est aggregatum ex ijs, quæ sunt omissa
 $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$, & finiti ab infinito subtractio finitum
relinquere non potest.

Alterum, quòd infinitarum fractionum
dispositio, in qua singula unitates à singulis
numeris Arithmetice proportionalibus deno-
minantur, pariter in infinitum extenditur.
Fiat huiusmodi dispositio A, cuius primam
fractionem denominet numerus B, & exces-
sus Arithmetice proportionalium sit C, & sub
singulis fractionibus dispositionis A, ab eodem
principio fiat dispositio D, fractionum, in qui-
bus unitates denominantur omnibus numeris



à B.

A	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{14}$	B	2.
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	C	3.

à B. Quia primi denominatores in dispositionibus A, D, sunt aequales, alter minor est quam ut ad alterum eandem habeat proportionem, quam C, ad unitatem; & colligendo secundus in dispositione A, minor est quam ut ad secundum in dispositione D, eandem habeat proportionem: sunt autem fractiones eundem habentes numeratorem in reciproca proportionem denominatorum; ergo prima, secunda, & singula deinceps fractiones dispositionis D, sunt minores quam ut ad primam, secundam, & singulas deinceps dispositionis A, eandem habeant proportionem, quam C, ad unitatem; & colligendo, tota dispositio D, minor est quam ut ad totam dispositionem A, eandem habeat proportionem, quam C, ad unitatem. Igitur si extensionis A, quantitas assignatur; etiam eiusdem extensionis multiplicam secundum numerum C, quantitatem necesse est assignari, quæ infinita extensione D, sit maior;

maior; quod est absurdum, Ergo extensio infinitarū fractionū dispositionis A, est infinita.

Dimissis igitur hisce dispositionibus quantitatis iurisdictionem superantibus, eandem contemplationem instituere capi de fractionibus, in quibus unitates à numeris triangulis denominantur; an videlicet ipse etiam quadraturam excluderent, an potius paterentur: Factis ergo de more calculis, & instructa demonstratione, inueni dispositionis huiusmodi quadraturam esse unitatem:

Unitates denomina- tæ triangulis	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$
quæ aggregatæ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
à prima sunt,							

quod aggregata quotlibet à prima sunt æquales numero multitudinis ipsarum denominato per numerum binario maiorem, & propterea semper unitate sunt minores eo defectu, qui iuxta multitudinis additarum fractionum incrementum infrà quālibet assignatam magnitudinē diminuitur, & in infinitū euanescit.

Præterea in eadem dispositione binæ sumptæ post unitatem singularum ab unitate sunt di-

✠ ✠ 2 midia:

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{21} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{36} \quad \frac{1}{45}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20}$$

media: ergo diuidendo, omnes post unitatem,
unitati sunt aequales.

Tandem si eiusdem dispositionis fractiones

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{21} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{36} \quad \frac{1}{45} \quad \frac{1}{55} \quad \frac{1}{66} \quad \frac{1}{78} \quad \frac{1}{91} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}$$

totidem sumantur deinceps secundum nume-
ros proportionis continuè subdupla à binario,
videlicet 2, 4, 8, &c. aggregatae sunt in con-
tinuè dupla proportionem; atqui magnitudines
dupla proportionis aggregatae infinitae sunt
aequales duplo prima, cum in nostro casu prima
sit dimidium unitatis, ergo propositae fractio-
nes aggregatae infinitae sunt aequales unitati.

Huiusmodi sunt, quae in primo praesentis
opusculi libro demonstravi de fractionibus, in
quibus unitates denominantur planis omnium
numerorum ab unitate: quia enim singuli
trianguli numeri singulorum huiusmodi pla-
norum sunt dimidij, propter reciprocam pro-
por-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{36}$	

portionem singula fractiones, in quibus unitates denominantur triangulis dupla sunt singularum, in quibus denominantur planis; Et ideo utrique dispositioni eadem conveniunt demonstrationes.

Ab huius fractionum dispositionis contemplatione feliciter expeditus, ad aliam progrediebar dispositionem, in qua singula unitates numeris quadratis denominantur. Hac speculatio fructus quidem laboris rependit, nondum tamen effecta est soluendo, sed ingenij ditioris postulat adminiculum, ut praeisam dispositionis, quam mihi metipso proposui, summam valeat reportare.

Pro fructibus habetur huius opusculi Theoremata, ea praecipue, quae in primo libro demonstrantur, Et praeterea sequentes propositiones videlicet.

1. Unitates denominatae compositis ex quadratis

dratis ab unitate, & lateribus eorundem, disposita in infinitum, & aggregata sunt aequales unitati.

Quadrati	1	4	9	16	25
Latera	1	2	3	4	5
Compositi	2	6	12	20	30
Unitates denominatae compositis.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$

Constat enim, quod singula fractiones huiusce dispositionis congruunt singulis, in quibus unitates denominantur planis omnium numerorum ab unitate.

2. Unitates denominatae compositis, ex quadratis ab unitate, & lateribus eorundem duplis, disposita in infinitum, & aggregata sunt aequales $\frac{3}{4}$.

Quadrati	1	4	9	16	25	36
Laterum dupli	2	4	6	8	10	12
Compositi	3	8	15	24	35	48
Unitates denominatae compositis.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{48}$

Quia singula, quae sumuntur alterna à prima, congruunt singulis, quae denominantur planis omnium

omnium imparium ab unitate, & idè sunt
 aequales $\frac{1}{2}$. Alterna verò à secunda congruunt
 singulis, quæ denominantur planis omnium
 parium à binario, & propterea sunt aequales
 $\frac{1}{4}$. Ergo colligendo, omnes sunt aequales $\frac{1}{4}$.

3. Unitates denominata compositis ex qua-
 dratis ab unitate, & lateribus eorundem
 triplis disposita in infinitum, & aggregata
 sunt aequales $\frac{11}{16}$.

Quadrati	1	4	9	16	25
Laterum tripli	3	6	9	12	15
Compositi	4	10	18	28	40
Unitates d. nomi- nata com. offis.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{40}$

Quia sumpta à prima binis relictis congruunt
 unitatibus, quæ denominantur planis numero-
 rum Arithmetice dispositorum ab unitate cū
 excessu 3, & propterea aggregata infinita sunt
 aequales $\frac{1}{3}$; Sumpta autem à secunda binis reli-
 ctis congruunt unitatibus, quæ denominantur
 planis Arithmetice dispositorum à 2, cum eodē
 excessu 3, & sunt aequales $\frac{1}{6}$; Residua tandem
 congruunt unitatibus, quæ denominantur
 planis

planis Arithmetice dispositorum à 3. cum
eodem excessu 3, & ideo sunt æquales $\frac{1}{9}$.
Ergo omnes æquales sunt aggregatis $\frac{1}{3} \frac{1}{6} \frac{1}{9}$, vi-
delicet $\frac{11}{18}$.

Et alia huiusmodi Theoremata, eadem pa-
riter methodo demonstraui.

Ad propositam ergo Questionē redeo, cuius
plura capita contrarias, ut ostendi, merentur
sententias. Istorum autem duo solummodo in
hoc opusculo mihi videor absoluisse; alterum de
fractionibus, in quibus unitates denominantur
productis numerorum Arithmetice disposito-
rum; alterum de ijs, in quibus differentia di-
spositorum quomodolibet numerorum eorundem
productis denominantur: præterea eadem in
Geometricis quantitatibus demonstrari posse
indicaui, prævia solummodo nominum interpre-
tatione, quæ habetur in ultimis definitionibus
libri tertij.

In assumptis autem capitibus quid questio-
ni respondendum sit, ex sequentibus unusquis-
que poterit indicare.

NOVÆ

I

N O V Æ
QVADRATVRÆ
ARITHMETICÆ

S E V
De Additione Fractionum.

LIBER PRIMVS.

In quo tractatur de Fractionibus, quarum
sunt denominatores numeri plani.

Principales Additiones habentur in Pro-
positionibus huiuslibri 7. 8. 13. 23. 37.

Quadraturæ verò in Proposi-
tionibus 17. 26. 40.

D E F I N I T I O N E S

I.

*Differentiam duarum magnitudinum, quan-
dò prima excedit secundam, voco, excessum
prima & secunda.*

II.

*Quando verò prima deficit à secunda, voco,
defectum prima, & secunda.*

A

Simi-

III.

Similes differentias, voco, tum excessus, tum defectus inter se.

IV.

Dissimiles verò excessus defectibus.

V.

Magnitudines Arithmetice dispositas, voco, quarum (sumptis continuè binis quibuslibet) differentia similes antecedentium, & consequentium sunt æquales.

VI.

Magnitudines Harmonicè dispositas, voco, quarum (sumptis continuè ternis quibuslibet) prima se habet ad tertiam, ut differentia prima, & secunda ad similem differentiam secundæ, & tertiæ.

Præterea suppono Lectorem informatum esse de ijs, quæ in Quinto, Septimo, Octauo, & Nono libris Elementorum Euclidis traduntur, quoad capefcendas demonstrationes. Nam, quoad ipsas propositiones, & praxim numerosam, sufficit memoriæ mandasse præcepta logisticæ Fractionum, quæ passim penes Arithmeticos leguntur.

Theo-

Theorema I. Propositio I.

*Trium Arithmetice dispositorum planum sub
extremis medium est Harmonice inter pla-
na sub singulis extremis, & medio.*

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 2.

H. 6.

I. 14.

E. 15.

G. 21.

F. 35.



Int Arithmetice dispositi tres A, B, C, quo-
rum differentia D, & planum extremorum
A C, sit G, plana vero sub singulis extre-
mis, & medio A B, C B, sint E, F. Dico
quod G, medium est Harmonice inter E,
F. Ex multiplicationibus D A, D C, pro-
ducantur H, I; ergo ut A, ad C, ita est H, ad I: & quia
E, F, sunt plana B A, B C; ergo E, ad F, est ut A, ad C,
vel ut H, ad I: quoniam A, multiplicando B, C, produ-
cit E, G; ergo A, multiplicando differentiam B, C, pro-
ducit similem differentiam E, G; & multiplicando D,
producit H; est autem D, differentia B, C; ergo H, est
differentia E, G, similis differentie B, C, vel differentie
A, B: Similiter demonstrabimus quod I, est differentia
G, F, similis differentie A, B, vel E, G: ergo E, ad F, est
ut differentia E, G, ad similem differentiam G, F. Ergo
G, medium est Harmonice inter E, F. Quod erat de-
monstrandum. Def. 6.

Theorema 2. Propos. 2.

Trium Harmonicè dispositorum planum sub extremis medium est Arithmeticè inter plana sub singulis extremis, & medio.

A. 3. B. 4. C. 6.

H. 1. I. 2.

D. 6.

E. 12.

G. 18.

F. 24.

Def. 6.

Def. 5.

Sint Harmonicè dispositi tres A, B, C, & planum extremorum A C, sit G, plana verò sub singulis extremis, & medio A B, C B, sint E, F. Dico quòd G, medium est Arithmeticè inter E, F. Sint H, & I, differentia similes A, B, & B, C; ergo ut A, ad C, ita est H, ad I, & productum A I, est æquale producto C H. Sit huiusmodi productum D: quoniam A, multiplicando B, C, producit E, G; ergo A, multiplicando differentiam, B, C producit similem differentiam E, G; & multiplicando I, producit D; est autem I, differentia B, C; ergo D, est differentia E, G, similis differentia B, C, vel A, B: Similiter demonstrabimus quòd D est differentia G, F, similis differentia A, B, vel E, G: ergo differentia E, G, & G, F, sunt æquales, & similes. Ergo G, medium est Arithmeticè inter E, F. Quod, &c.

DEFINITIO VII.

Vnam magnitudinem altera denominatam, voco, quamlibet fractionem, in qua una
ma.

magnitudo stat loco numeratoris, altera
verò loco denominatoris.

Theor. 3. Propos. 3.

Eadem magnitudinē tribus Harmonicè dispositis denominata fiunt fractiones Arithmeticè dispositæ.

A. 1.		
B. 3.	C. 4.	D. 6.
E. $\frac{1}{4}$	F. $\frac{3}{4}$	G. $\frac{1}{6}$
H. 12.	K. 18.	I. 24.

DEnominetur A, magnitudo tribus Harmonicè dispositis B, C, D, ut fiant fractiones E, F, G. Dico, quod E, F, G, sunt Arithmeticè dispositæ. Ex multiplicationibus C B, C D, B D, producantur H, I, K; ergo, quia B, C, D, sunt Harmonicè dispositi, K, medius est Arithmeticè inter H, I: & quia I, K, sunt producti D C, D B; ergo I, ad K, est ut C, ad B; & ex denominatione A, per C, & B, fiunt fractiones F, & E; ergo ut C, ad B, vel ut I, ad K, ita est E, ad F: Similiter demonstrabimus, quod ut K, ad H, ita est F, ad G; ergo per conversionem rationis, & ex æquo ut I, K, H, sunt Arithmeticè dispositi, sic fractiones E, F, G, sunt Arithmeticè dispositæ. Quod, &c.

DEFINITIO VIII.

Differentias, & plana in aliqua dispositione,
voco

voco absolutè, differentias, & plana magnitudinum, quæ sunt continuè consequentes in illa dispositione, prima videlicet, & secunda; secunda, & tertia; & sic deinceps usque ad ultimam, si disposita sunt in aliqua multitudine; vel in infinitum, si disposita concipiuntur infinita.

Theor. 4. Propos. 4.

Factis duabus dispositionibus, prima quidem omnium numerorum ab unitate, secunda verò omnium numerorum, quos assumptus aliquis numerus metitur ab assumpto; Unitates denominatae planis in prima, ad unitates denominatas planis in secunda, singula ad singulas eiusdem ordinis, ita se habent, ut assumpti numeri quadratus ad unitatem.

A.	1.	2.	E.3.	4.	5.	6.	7.	8.
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	
C.	3.	6.	F.9.	12.	15.	18.	21.	24.
D.	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{504}$	

Sit

Sit omnium numerorum ab vnitare dispositio A, & assumptus numerus E, cuius quadratus F; & sit omnium numerorum, quos E, metitur ab E, dispositio C; Sint etiam B, vnitates denominatæ planis in A; & D, vnitates denominatæ planis in C. Dico, quòd singulæ B, ad singulas D, eiusdem ordinis, ita se habent, vt F, ad vnitatem. Quia numerus E, & vnitates æquè metiuntur numeros in C, & A, eiusdem ordinis, vt singuli in C, ad E, ita singuli eiusdem ordinis in A, ad vnitatem, & sunt E, & vnitates homologæ ordinis eiusdem numeris in A, & C; conuertendoque, & ex æquo binæ C, inter se sunt vt binæ A, inter se, si sumantur homologæ ordinis eiusdem: ergo plani denominatores in singulis D, ad planos denominatores in singulis eiusdem ordinis B, sunt similes, & duplicatam habent proportionem homologorum laterum videlicet numeri E, ad vnitatem, vel eandem quàm numerus F, ad vnitatem; sed vt denominatores D, ad B, inter se, ita reciprocè sunt vnitates denominatæ B, ad D, inter se: Ergo singulæ B, ad singulas eiusdem ordinis D, sunt vt F, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 5. Propos. 5.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitare binæ à secunda sunt dimidiæ singularum à prima.

Sit A, series omnium numerorum ab vnitare, & B, sint vnitates denominatæ planis in A. Dico, quòd binæ B, à secunda sunt dimidiæ singularum à prima. Sit C, series omnium numerorum à binario, quos binarius metitur,

A. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{48}$
C.	2.		4.		6.		8.
D.		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{48}$	

- Prop. 4. titur; & D, sint vnitates denominatæ planis in C; ergo singulæ B, à prima ad singulas D, à prima sunt vt 4. binarij quadratus ad vnitatem: & quoniam in A, sunt omnes numeri ab vnitare, sunt inter numeros A, à binario, qui est secundo loco, omnes C, à primo, interpositis tamen singulis Arithmeticè medijs, quos binarius non metitur; ergo singuli plani denominatores vnitatum D, à prima medij sunt Harmonicè inter binos denominatores B, à secunda; ergo singulæ D, à prima mediæ sunt Arithmeticè inter binas B, à secunda; & propterea singulæ D, à prima ad binas B, à secunda sunt dimidiæ, videlicet, vt vnitas ad 2: Ergo ex æquo singulæ B, à prima ad binas B, à secunda sunt vt 4. ad 2; & conuertendo binæ à secunda sunt dimidiæ singularū à prima. Quod, & c.
- Prop. 1.
- Prop. 3.

Theor. 6. Propos. 6.

Differentia laterum plano denominata est dissimilis differentia vnitatum singulis lateribus denominatarum.

Sint latera A, B, quorum differentia C, denominetur plano D, vt fiat fractio E; & denominata vnitare per B, & A, fiant fractiones F, & G; & sit C, excessus A, B. Dico quod E, est defectus F, G. Quia F, est vnitas de-
no-

A. 5.

C. 2.

B. 3.

F. $\frac{5}{3}$

D. 15.

E. $\frac{2}{15}$ G. $\frac{4}{15}$

nominata per A, ex multiplicatione F A, producitur vnitas; & ex multiplicatione vnitatis, & B, producitur B; ergo ex mutua multiplicatione F A B, producitur B; est autem D, planum A B; ergo ex multiplicatione F D, producitur B. Similiter demonstrabimus, quod ex multiplicatione G D, producitur A. Cum igitur ex multiplicationibus G, & F, in D, producantur A, & B; ergo ex multiplicatione excessus G, F, in D, producitur excessus A, B, videlicet C; Sed quia E, fractio est ex denominatione C, per D; ergo etiam ex multiplicatione E, in D, producitur C; ergo E, est æqualis excessui G, F; ergo E, est defectus F, G. Quod, &c.

DEFINITIO IX.

Continuam magnitudinum dispositionem, voco, cum differentie antecedentium, & consequentium sunt similes.

Theor. 7. Prop. 7.

Differentie denominata planis in continua dispositione simul sumpta sunt æquales uni differentia denominata plano extremorum.

B

Sint

$$\begin{array}{cccc}
 A. 2. & B. 4. & C. 5. & D. 9. \\
 E. \frac{2}{5} & F. \frac{2}{5} & G. \frac{4}{5} & \\
 & H. \frac{7}{15} & & \\
 I. \frac{1}{2} & K. \frac{1}{4} & L. \frac{1}{5} & M. \frac{1}{9}
 \end{array}$$

Def. 6.

Sint A, B, C, D, aliquot magnitudines continuæ dispositionis in qua differentia planis denominatæ sint fractiones E, F, G, Differentia verò denominata plano extremorum A, D, sit fractio H. Dico, quòd E, F, G, simul sumptæ sunt æquales H. Denominentur singulae unitates lateribus A, B, C, D, ut fiant fractiones I, K, L, M. Quoniam E, est differentia denominata plano A B, & I, K, sunt unitates denominatæ lateribus A, B; æqualis est E, differentia I, K, quæ dissimilis est differentia A, B. Similiter demonstrabimus F, G, H, æquales esse differentijs K, L, L, M, I, M, quæ sunt dissimiles differentijs B, C, C, D, A, D; unde quia differentia in dispositione A, B, C, D, sunt similes, etiam differentia in dispositione I, K, L, M, sunt similes; & propterea simul sumptæ sunt æquales differentia I, M, vel fractioni H: Atqui colligendo differentia in dispositione I, K, L, M, sunt æquales fractionibus E, F, G, simul sumptis. Ergo fractiones E, F, G, simul sumptæ sunt æquales H. Quod, &c.

Def. 5;

Theor. 8. Propos. 8.

Unitates denominatæ planis in Arithmetica dispositione sunt ad unitatem plano extremorum denominatam ut numerus multitudinis ipsarum ad unitatem.

Sint

A. 2. B. 5. C. 8. D. 11. N. 3. O. 9.
 E. $\frac{1}{15}$ F. $\frac{7}{45}$ G. $\frac{1}{15}$ H. $\frac{1}{22}$
 I. $\frac{1}{15}$ K. $\frac{2}{45}$ L. $\frac{1}{15}$ M. $\frac{2}{22}$

Sint A, B, C, D, in Arithmetica dispositione, cuius planis denominatę singulę unitates sint fractiones E, F, G, & unitas denominata plano extremorum A D, sit H. Dico quod E, F, G, ad H, sunt vt numerus multitudinis E, F, G, ad unitatem. Sit N, differentia semper eadem in dispositione, quę planis denominetur, vt fiant fractiones I, K, L, & sit O, differentia extremorum A, D, quę plano denominetur, vt fiat fractio M. Igitur facti sunt I, K, L, & I, K, L, eosdem habent denominatores, numerator verò communis ipsarum E, F, G, est unitas, & factorum I, K, L, est N; ergo tū singulę, tū collectę E, F, G, ad I, K, L, vel ad M, sunt vt unitas ad N. Pariter quia M, H, eundem habent denominatorem, numerator verò M, est O, & ipsius H, est unitas; ergo M, ad H, est, vt O, ad unitatem; & ex quo in perturbata collectę E, F, G, ad H, sunt, vt O, ad N: Cum autem A, B, C, D, sint Arithmetice dispositi, est O, differentia extremorum ad N, differentiam consequentium ita multiplex, vt numerus multitudinis E, F, G, ad unitatem. Ergo E, F, G, ad H, sunt, vt numerus multitudinis E, F, G, ad unitatem. Quod, &c.

Prop. 7.

Theor. 9. Propos. 9.

Unitates denominatae planis omnium numerorum ab unitate terna à tertia sunt pars tertia singularum à prima.

B 2

Ordi.

A. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
B.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$
C.			3.			6.		9.
D,				$\frac{1}{18}$			$\frac{1}{24}$	

Ordinentur A, omnes numeri ab vnitare, & B, vnitates denominatæ planis A. Dico ternas B, à tertia, tertiam esse partem singularum à prima. Ordinentur omnes numeri C, à ternario, quos idem metitur, & D, vnitates denominatæ planis C: Et quoniam A, sunt omnes numeri, etiam inter numeros A, à ternario, qui est tertio loco, sunt omnes C, à primo, binis medijs Arithmetice semper interpositis, quos ternarius non metitur. Ergo ternæ vnitates B, à tertia (denominatæ planis quatuor dispositorum Arithmetice à numeris C, qui sunt inter numeros A,) ad singulas vnitates D, (denominatas planis numerorum C, qui eorundem quatuor semper sunt extremi) à prima sunt, ut idem ternarius, numerus videlicet magnitudinum, quæ ternæ sumuntur ad vnitatem; Singulæ autem D, à prima ad singulas B, à prima sunt, ut unitas ad 9, quadratum ternarij: Ergo ex æquo ternæ B, à tertia sunt ad singulas B, à prima, ut 3. ad 9. nempe pars tertia. Quod, &c.

Theor. 10. Propos. 10.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitare, quaternæ à quarta sunt pars quarta singularum à prima.

Nam quia binæ à secunda sunt dimidiæ singularum à prima, binæ à quarta sunt ad singulas à secunda, ut

vt vnitas ad 2. & colligendo quaternæ à quarta sunt ad binas à secunda, vt vnitas ad 2. & binæ à secunda sunt ad singulas à prima, vt vnitas ad 2. vel, vt 2. ad 3. Ergo ex æquo quaternæ à quarta ad singulas à prima sunt vt vnitas ad 4. videlicet pars quarta. Quod, &c.

Eadem huius, & præcedentis demonstrationum methodo possunt singuli sequentis Theorematis casus demonstrari, videlicet, Vnitates denominatas planis omnium numerorum ab vnitate quinas à quinta partem esse quintam singularum à prima, senas à sexta partem sextam, septenas à septima partem septimam, & sic deinceps; ex quorum inductione postea patefiat ipsius veritas conclusionis: ne tamen scrupulosum Geometram dubitare contingat, generali superinde factæ propositioni vnica satisfaciam demonstratione, vt infra.

Theor. II. Propos. II.

Vnitates denominatæ planis omnium numerorum ab vnitate sumptæ totidem ab vna ipsarum secundum numerum ordinis eiusdem, sunt pars ab eodem numero denominata singularum à prima.

Ordinentur A, omnes numeri ab vnitate, & B, vnitates denominatæ planis A, quarum F, assumpta, & inter numeros A, sit eiusdem F, numerus ordinis E. Dico B, sumptas ab F, semper totidem secundum numerum E, partem esse denominatam ab E, singularum B, à prima. Ordinentur ab E, omnes numeri C, quos E, metitur,

A. 1.	2.	E. 3.	K. 4.	L. 5.	H. 6.	M. 7.	N. 8.	I. 9.
B. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	F. $\frac{1}{12}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{100}$
C		3.		6.				9.
D.			$\frac{1}{15}$				$\frac{1}{35}$	

Prop. 8.

Prop. 4.

tur, & D, vnitates denominatæ planis numerorum C. Quoniam A, sunt numeri ab vnitare, sunt etiam inter numeros A, ab E, qui est in eiusdem ordinis loco, omnes numeri C, à primo, qui sint E, H, I, interpositis totidem semper medijs Arithmetice, secundum numerum vnitare minorem E. Sint numeros E, H, interpositi K, L, & numeros H, I, totidem interpositi M, N, secundum numerum vnitare minorem E; Coassumptis ergò hinc inde semper duobus eorum, quos E, metitur, sunt singulæ dispositiones Arithmeticæ numerorum E, K, L, H, & H, M, N, I, totidem semper, secundum numerum vnitare maiorem E, quarum planis denominatæ vnitates sunt ipsæ B, sumptæ totidem ab F, secundum numerum E, quæ ad singulas vnitates D, à prima denominatas planis extremorum earundem dispositionum, qui sunt numeri C, ita se habent, vt E, numerus multitudinis totidem sumptarum ab F, ad vnitatem; Singulæ autem D, à prima, ad singulas B, à prima sunt, vt vnitatis ad quadratum E: ergo ex æquo sumptæ B, ab F, semper totidem secundum numerum E, ad singulas B, à prima sunt, vt E, ad suum quadratum; Sed E, cum suum quadratum metiatur per se ipsum, sui quadrati pars est a se ipso denominata. Ergo sumptæ B, ab F, semper totidem secundum numerum E, sunt pars ab eodem E, denominata, singularum B, à prima. Quod, &c.

Theor.

Theor. 12. Propos. 12.

Vnitates denominatae planis omnium numerorum ab unitate, sumpta à prima totidem semper secundum numeros proportionis continuè subdupla ab unitate sunt in proportionem continuè dupla.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
A. $\frac{1}{2}$	B. $\frac{1}{4}$				C. $\frac{1}{8}$		

Vnitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum ab unitate prima sit A, duarum sequentium aggregatum B, quatuor sequentium aggregatum C, & deinceps totidem huiusmodi vnitatum secundum numeros proportionis continuè subdupla sumantur aggregata. Dico A, B, C, esse in proportionem continuè dupla. Quia binæ à secunda sunt dimidiæ singularum à prima, B, subduplum est ipsius A, & eadem ratione, quia quaternæ à quarta sunt dimidiæ binarum à secunda, C, subduplum est ipsius B, & eadem semper demonstratione, quodlibet aggregatum subduplum est præcedentis. Ergo conuertendo A, B, C, sunt in proportionem continuè dupla. Quod, &c.



Theor.

Theor. 13. Prop. 13.

*Vnitatum, quæ denominantur planis omnium
numerorum ab unitate, quotlibet assum-
pta à prima sunt æquales numero ipsarum
multitudinis denominato per numerum
unitate maiorem.*

A. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	D. 8.	E. 9.
B. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	

Prop. 7.

Sint A, numeri ab unitate, & B, quotlibet unitates à prima earum, quæ denominantur planis numerorum A. Dico B, aggregatas æquales esse numero multitudinis ipsarum B, denominato per numerum unitate maiorem. Sint D, E, numeri quorum plano denominatur ultima ipsarum B. Et quoniam sunt dispositi ab unitate omnes numeri A, quorum consequentium defectus sunt singulæ unitates, quæ planis eorundem denominatæ sunt B; Igitur B, aggregatæ sunt æquales defectui extremorum unitatis, & E, per eorundem planum denominato. Est autem D, defectus unitatis, & E, & eorundem planus idem E: Ergo B, sunt æquales D, denominato per E. Sed cum numeri A, sint omnes ab unitate, numerus E, est multitudinis numerorum A, usque ad E, & D, unitate minor, quam E, numerus multitudinis ipsarum B. Ergo unitates B, aggregatæ sunt æquales numero ipsarum multitudinis denominato per numerum unitate maiorem. Quod, &c.

Co-

Corollarium.

Vnde constat, quod unitatum, quæ denominantur planis omnium numerorum, quotlibet assumptæ à prima sunt minores unitate.

Problema primum. Propos. 14.

Data proportione minoris inequalitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ sit numeri ad numerum unitate maiorem.

A. 47.
E. 8

B. 53.
F. 9.

C. 6.
D. 48.

SIt proportio data minoris inequalitatis A, ad B. Oportet alteram inuenire maiorem proportione A, ad B, quæ sit numeri ad numerum unitate maiorem. Sit C, excessus B, A, & D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: constat D, non esse æqualem A; alias C, metiretur etiam A, & metitur se ipsum; ergo metiretur compositum ex C, A, videlicet B, & non esset D, maxima magnitudo, quam C, metitur in B: constat etiam D, non esse minorem A; quia sequeretur idem, vel maius absurdum; ergo D, maior est A; & D, ad C, maiorem habet proportionem A, ad C. Sit E, numerus, per quem C, metitur D, & E, auctus unitate fiat F; ergo D, C ad

ad C, est, ut E, ad unitatem; ergo E, ad unitatem maiorem habet proportionem A, ad C; & componendo E, ad F, maiorem habet proportionem A, ad B; & est numerus F, unitate maior, quam E. Quod facere oportebat.

Axioma Primum.

Quando infinita magnitudines infinitæ sunt extensionis, possunt in aliqua multitudine sumi, ut superent quamlibet propositam extensionem.

Theor. 14. Propos. 15.

Quando in ordine magnitudinum in infinitum dispositarum, quotlibet assumptæ à prima sunt minores una eadem propositæ magnitudine generis eiusdem, omnes à prima in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt extensionis finitæ.

A — — — — D — — — —

Sint in extensione A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ magnitudines, quarum quotlibet assumptæ à pri-

prima sint minores D, generis eiusdem. Dico extensionem A, esse finitam: alias erit infinita, & sumptæ in ali.^{Ax. 1.} qua multitudine magnitudines dispositæ in A, à prima superabunt quamlibet propositam extensionem D, contra hypothesim: non est igitur A, extensionis infinitæ, sed finitæ. Quod, &c.

Corollarium.

Colligitur ex his quòd unitates denominatae planis omnium numerorum ab unitate in infinitum dispositæ, & aggregatae sunt extensionis finitæ. <sup>Corol.
Prop. 15.</sup>

DEFINITIO X.

Magnitudines dicuntur implere propositam extensionem, quando existentes infinitæ sunt extensionis minoris proposita; vel quando existentes finitæ, ita sunt minores proposita, ut una alia magnitudine adiecta in earumdem ordine continuato proxima, fiant extensionis maioris proposita.

Axioma Secundum.

Quando infinitæ magnitudines finitæ sunt extensionis, & singula magnitudines eadem
C 2 in

in infinitum concipiuntur in una, & altera extensione disponi, & aggregari, congruit una extensio alteri.

Theor. 15. Propos. 16.

Quando magnitudines à prima dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt extensionis finitæ, sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem maiorem quidem prima, minorem tamen extensione omnium.

A ——— B ——— C ———

AX. 2.

SIt A, extensio finita magnitudinum, quæ à prima dispositæ in infinitum, & in ea sunt aggregatæ, & sit proposita extensio B, maior quidem prima dispositarum in A, minor tamen ipsa extensione A, & ex magnitudinibus in A, dispositis assumptæ à prima, & eodem ordine dispositæ in C, impleant B. Dico, quod assumptæ in C, sunt in aliqua multitudine: alias assumptæ in C, quæ implent B, sunt infinitæ; igitur in extensione B, sunt dispositæ eodem ordine in infinitum, & aggregatæ magnitudines, quæ pariter in extensione A; & sunt ambo A, B, extensiones finitæ; congruit ergo B, extensioni A, minor maiori; quod est absurdum. Ergo assumptæ in C, quæ implent B, non sunt infinitæ, sed in aliqua multitudine. Quod, &c.

Theor.

Theor. 16. Propos. 17.

Vnitates denominatae planis omnium numerorum ab unitate in infinitum dispositae, & aggregatae sunt aequales unitati.

A ——— B ——— C ———
D ——— E ———

Sint in A, dispositae in infinitum, & aggregatae vnitates denominatae planis omnium numerorum ab unitate. Dico A, aequalem esse unitati: alias erit A, maior, vel minor unitate. Sit maior, igitur in aliqua multitudine sumptae à prima vnitates in A, dispositae implent unitatem. Sit huiusmodi multitudinis numerus B, qui adiecta unitate fiat C: ergo aliquot vnitates in A, dispositae sumptae in multitudine numeri C, sunt maiores unitate, quod est absurdum. Non est igitur A, maior unitate. Sit minor, & data proportionem minoris inaequalitatis A, ad unitatem, inueniatur altera maior, quae sit numeri D, ad E, unitate maiorem; & aliquot vnitates in A, dispositae sumantur à prima in multitudine numeri D; quae cum sint aequales numero D, denominato per E, habebunt ad unitatem eandem proportionem, quam D, ad E, maiorem videlicet, quam A, ad unitatem: Ergo aliquot vnitates in A, dispositae sunt maiores omnibus in infinitum dispositis, parstoto; quod est absurdum. Non igitur A, minor est unitate; sed neque maior. Ergo A, aequalis est unitati.
Quod, &c.

Aliter;

Prop. 16.

Def. 10.

Corol.

Prop. 13.

Prop. 14.

Prop. 13.

Aliter.

Prop. 5. **Q** Via binæ unitatum dispositarum in A, à secunda sunt dimidiæ singularum à prima; colligendo, omnes à secunda sunt dimidiæ omnium à prima; & diuidendo, omnes à secunda sunt æquales primæ; est autem prima dimidium unitatis; Ergo omnes à prima sunt æquales unitati. Quod, &c.

Aliter eadem Methodo.

Prop. 9. **Q** Via dispositarum in A, ternæ à tertia sunt pars tertia singularum à prima; colligendo, omnes à tertia sunt pars tertia omnium à prima; & diuidendo, omnes à tertia sunt dimidiæ duarum præcedentium; sunt autem duæ præcedentes æquales 2. denominato per 3: igitur omnes à tertia sunt æquales unitati denominatæ per 3. Ergo colligendo, omnes dispositæ in A, sunt æquales 3. denominato per 3. videlicet unitati. Quod, &c.

Theor. 17. Prop. 18.

Vnitatum denominatarum planis omniū numerorum ab unitate, qualibet assumpta, summa succedentium in infinitum, & summa præcedentium, & assumpta sunt continuè proportionales, ut unitas ad numerum ordinis assumpta.

Vni-

$$\begin{array}{ccccc} & D. 5. & & E. 6. & \\ C & \text{---} & A. \frac{1}{10} & B & \text{---} \end{array}$$

VNitatum denominatarum planis omnium numerorum ab unitate sit A, quælibet assumpta, cuius ordinis numerus D; Sitque B, summa succedentium in infinitum, & C, summa præcedentium, & assumptæ A. Dico A, B, C, esse continuè proportionales, ut unitas ad D. Sit E, numerus unitate maior D: quia D, est numerus ordinis A, est etiam numerus multitudinis aggregatarum in C; igitur C, est æqualis D, denominato per E; aggregatum vero ex C, B, est æquale unitati; ergo C, ad aggregatum ex C, B, est ut D, denominatus per E, ad unitatem, videlicet ut D, ad E; & dividendo, C, ad B, est ut D, ad unitatem; quapropter C, ad B, est, ut D, denominatus per E, ad unitatem pariter denominatam per E; ergo B, æqualis est unitati denominatæ per E. Quia etiam D, est numerus ordinis A; & E, inter omnes numeros ipsi D, proximus unitate maior; constat, quod A, est unitas denominata plano D E; sed unitas denominata per E, ad unitatem denominatam plano D E, est ut planum D E, ad E; vel (diuidendo per E,) ut D, ad unitatem; ergo B, ad A, est ut D, ad unitatem. Sunt ergo continuè proportionales C, B, A, ut D, ad unitatem; & conuertendo, A, B, C, sunt continuè proportionales ut unitas ad D. Quod, &c.

Prop. 13.

Prop. 17.

Theor. 18. Prop. 19.

*Factis duabus Arithmetice dispositionibus
prima ab unitate, altera ab assumpto nu-
mero,*

mero, eorum videlicet numerorum, quos assumptus metitur per singulos in prima dispositos; unitates denominatæ planis omnium numerorum prima, ad unitates denominatas planis omnium numerorum alterius dispositionis ordinis eiusdem, ita se habent, ut assumpti numeri quadratus ad unitatem.

A. 1.	3.	5.	7.	9.	11.
D.	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{49}$
		B. 2.			
C. 2.	6.	10.	14.	18.	22.
E.	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{44}$
		F. 4.			

SIt dispositio Arithmetica numerorum A, ab unitates & B, numerus assumptus; à quo fit dispositio numerorum C, quos B, metitur per numeros A, eiusdem ordinis; unitates autem denominatæ planis numerorum A, & C, sint D, & E; & numeri B, quadratus F. Dico D, ad E, ordinis eiusdem esse, ut F, ad unitatem. Quia B, metitur numeros C, per A, eiusdem ordinis, ut sunt numeri A, ad unitatem, ita C, eiusdem ordinis ad B; & sunt numeri A, & C, ordinis eiusdem homologi unitatis, & B; & eadem ratione, ut unitas ad numeros A, ita B, ad C, ordinis eiusdem; ergo ex æquo numeri A, inter se sunt ut C, eorundem ordinum inter se; & plani eorundem ordinum numeris A, & C, contenti sunt similes; ergo denominatores D, ad eiusdem ordinis

nis denominatores E, sunt similes; & duplicatam proportionem habent homologorum laterum unitatis, ad B; videlicet eandem, quam unitas ad F; Ergo D, ad E, ordinis eiusdem sunt reciprocè, vt F, ad unitatem. Quod, &c.

Theor. 19. Prop. 20.

Factis duabus Arithmeticis dispositionibus prima ab unitate, secunda vero ab assumpto in prima, eorum, quos assumptus metitur per singulos prima; Omnes numeri secunda sunt in prima, totidem semper interiectis, quot unitatum est assumptus una dempta.

A. 1	3. B. 5.	7.	9.	11.	13.
D. 5.	15. 25.	35.	45.	55.	65.
	C. 4.				
E. 4.	12. 20.	28.	36.	44.	52.

SIt dispositio Arithmetica numerorum A, ab unitate; & inter numeros A, assumptus B; à quo fiat dispositio Arithmetica numerorum, quos idem B, metitur per singulos A. Dico numeros D, esse inter numeros A, totidem semper interpositis, quot sunt unitates in B, una minus. Sit C, excessus B, & unitatis; & disponantur numeri E, qui sint excessus binorum D, & A, eiusdem ordinis. Quoniam B, metitur numeros D, per A, eiusdem

D

dem

dem ordinis; est vnitas ad B, vt numeri A, ad D; & diuidendo, est vnitas ad C, vt numeri A, ad E; igitur E, sunt multiplices numeri C; & quia C, excessus B, & vnitatis magnitudinum, quæ sunt inter numeros A, vel æqualis est, vel multiplex excessui consequentium eorundem A; ergo numeri E, sunt multiplices excessui consequentium A; & sunt numeri E, excessus numerorum D, A; ergo numeri D, sunt inter numeros A. Præterea, quia numeri A, metiuntur numeros D, per B; igitur excessus consequentium A, metitur excessum consequentium D, per B; sed inter extremas mediæ Arithmeticæ totidem interponuntur, quoties excessus consequentium excessum extremarum metitur vna minus; Ergo numeri D, sunt inter numeros A, totidem semper interpositis numeris A, quot sunt vnitates in B, vna minus. Quod, &c.

Theor. 20. Prop. 21.

Vnitates denominatæ planis numerorū Arithmetice dispositorum ab unitate, sumptæ semper totidem ab assumpta, quot unitatum est numerus inter Arithmetice dispositos eiusdem ordinis cum assumpta, sunt ad singulas à prima, vt vnitas ad eundem numerum.

Sint numeri A, Arithmetice dispositi ab unitate, & B, vnitates denominatæ planis numerorum A, quarum

A. 1.	D. 3.	5.	7.	9.	11.
B. $\frac{1}{3}$	C. $\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{33}$
E. 3.	9.	15.	21.	27.	33.
F. $\frac{1}{27}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{33}$

rum vna C, assumpta, & inter numeros A, sit D, ordinis eiusdem. Dico B, sumptas à C, secundum numerum D, ad singulas eadem B, à prima esse vt vnitas ad numerum D. Disponantur Arithmetice numeri E, à D, quos D, metitur per numeros A, & sint F, vnitates denominatae planis numerorum E: constat, quod omnes numeri E, sunt inter numeros A, à D, totidem semper interpositis ex reliquis numeris A, quot sunt vnitates in D, vna dempta; ergo numerorum A, inter binos numeros consequentes E, singulae sunt arithmetice dispositiones numerorum, quorum planis denominatae vnitates B, sunt à C, totidem semper, quot sunt numeri intermedij vno amplius, videlicet, quot sunt vnitates in D; & ad singulas F, à prima denominatas plano extremo, qui sunt E, se habent, vt numerus multitudinis earum, quae totidem semper sumuntur, videlicet numerus D, ad vnitatem: sunt autem singulae F, à prima ad singulas B, à prima, vt vnitas ad quadratum assumpti D, ergo ex a quo vnitates B, totidem semper sumptae a C, secundum numerum D, ad singulas eadem B, à prima sunt, vt numerus D, ad sui quadratum, videlicet, vt vnitas ad D. Quod, &c.

Prop. 20.

Prop. 8.

Prop. 19.

D 2

Theor.

Theor. 21. Prop 22.

Vnitates denominatae planis Arithmetice dispositorum ab unitate, sumptæ à prima secundum numeros proportionis continuæ submultiplicis ab unitate, ad numerum sibi proximum in Arithmetica dispositione, sunt in eadem continuè multiplici proportionione.

A. 1.	B. 3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.
C. $\frac{1}{1}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{385}$	$\frac{1}{2730}$	$\frac{1}{17017}$	$\frac{1}{109395}$	$\frac{1}{705435}$	$\frac{1}{4537935}$	$\frac{1}{29523215}$
D. $\frac{1}{3}$	E. $\frac{1}{5}$					F. $\frac{1}{7}$			G. $\frac{1}{9}$

Sint A, numeri Arithmetice dispositi ab unitate, quorum B, proximus unitati; & sint C, vnitates denominatae planis numerorum A; & segregentur C, ut prima sit D, & à secunda totidem, quot sunt vnitates in B, sint E; & alia toties totidem sint F; & quot sunt F, toties totidem secundum numerum B, sint G, & sic deinceps: constat C, ita segregatas esse in D, E, F, G, ut sumptæ sint secundum numeros proportionis continuæ submultiplicis ab unitate ad B. Dico D, E, F, G, esse in eadem continuè multiplici proportionione numeri B, ad unitatem.

Prop. 21. Quia B, est secundo loco Arithmetice dispositorum, singulæ C, à prima ad totidem semper sumptas à secunda secundum numerum B, sunt ut B, ad unitatem; ergo

Prop. 21. D, ad E, est ut B, ad unitatem. Item singulæ in E, ad

to-

totidem secundum numerum B, sumptas in F, sunt vt B, ad vnitatem; & quot sunt singulæ in E, toties totidem secundum numerum B, sunt in F; ergo colligendo omnes E, ad omnes F, sunt vt B, ad vnitatem. Similiter demonstrabitur omnes F, ad omnes G, esse vt B, ad vnitatem, & sic deinceps. Ergo D, E, F, G, sunt in continuè multiplici proportionem numeri B, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 22. Prop. 23.

Vnitates denominatæ planis Arithmetice dispositorum ab vnitatem, quotlibet aggregatæ à prima sunt aquales numero multitudinis earundem denominato per productum eiusdem, & excessus dispositionis Arithmetice auctum semper vnitatem.

A. 1.	3.	5.	7.	E. 9.
	B. 2.			
C. $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{63}$	
	D. 4.	F. 8.		
G. $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{63}$	

Sint numeri A, dispositi Arithmetice ab vnitatem, quorum excessus B; Sint etiam C, vnitates denominatæ planis numerorum A, assumptæ à prima secundum numerum D; & inter numeros A, post vnitatem numeri totidem sumantur, & sumptorum sit extremus E; & sit F, excessus E, & vnitatis: constat F, ad B, esse ut D, multitudo

titudo numerorum A, post unitatem ad ipsam unitatem: igitur D, multiplicando B, facit F, qui auctus unitate fit E. Dico C, æquales esse D, denominato per E. Ex denominatione B, per plana numerorum A, vsque ad E, fiant fractiones G, totidem, quot sunt C. Quia B, est excessus consequentium A, & F, extremorum, & E, planum extremorum, videlicet unitatis, & E; sunt G, æquales F, denominato per E: Sunt autem G, ad C, vt B, ad unitatem; & vt B, ad unitatem, ita est F, ad D, uel F, denominatus per E, videlicet G, ad D, pariter denominatum per E; ergo G, ad C, sunt ut G, ad D, denominatum per E; ergo C, sunt æquales D, denominato per E. Quod, &c.

Theor. 23. Prop. 24.

*Vnitates denominatæ planis numerorum
Arithmetice dispositorum ab unitate quot-
libet aggregatæ à prima sunt minores uni-
tate denominata excessu consequentium
dispositionis Arithmetice.*

C. $\frac{1}{3}$	L. $\frac{1}{12}$	E. $\frac{1}{36}$	F. $\frac{1}{63}$
B. 2.	L. 4.	E. 8.	F. 9.

Sint C, quotlibet unitates denominatæ planis numerorum arithmetice cum excessu B, dispositorum ab unitate, sumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores esse unitate denominata per B. Ex ductu B, in D, fiat E; & F, unitate maior, quam E; igitur

tur D, ad F, minorem habet proportionem, quam D, ad E; & quia E, productus est ex B, in D, ut D, ad E, ita est unitas ad B; ergo D, ad F, minorem habet proportionem, quam unitas ad B; & propterea D, denominatus per F, est minor unitate denominata per B: sunt autem C, æquales D, denominato per F; ergo C, sunt minores unitate denominata per B. Quod, &c. Prop. 23.

Corollarium Primum.

Vnde constat primo loco unitates denominatas planis numerorum Arithmetice dispositorum ab unitate in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis. Prop. 15.

Corollarium Secundum.

Patet etiam secundo loco, quod unitates denominatae planis numerorum Arithmetice dispositorum ab unitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earundem in infinitum. Prop. 16.

Probl.

Probl. 2. Prop. 25.

Data proportione minoris inæqualitatis, alteram inuenire maiorem data, quæ sit numeri, quem datus numerus metiatur ad numerum unitate maiorem.

A. 39. C. 7. B. 43.
D. 10. E. 11. F. 14. G. 15.

Prop. 14.

Data sit proportio minoris inæqualitatis A, ad B, & datus numerus C, oportet alteram proportionem inuenire maiorem data, quæ sit numeri, quem C, metiatur ad numerum unitate maiorem. Data proportione minoris inæqualitatis A, ad B, maior inueniatur, quæ sit numeri D, ad numerum E, unitate maiorem. Si contigerit C, metiri D, constat proportionem D, ad E, quæ sitam esse. Quod si C, non metitur D, sumatur C, toties, donec fiat maior D, & sit factus F, cui unitate aggregata fiat G. Dico proportionem F, ad G, esse quæ sitam; quoniam F, maior est D, habet F, ad unitatem maiorem proportionem, quam D; & componendo F, ad G, maiorem, quam D, ad E; sed D, ad E, adhuc maiorem habet, quam A, ad B; ergo F, ad G, multò maiorem habet, quàm A, ad B: inuenta est ergo proportio F, numeri, quem C, metitur ad G, numerum unitate maiorem, quæ est maior proportione A, ad B.
Quod faciendum erat.

Theor.

Theor. 24. Prop. 26.

*Vnitates denominatæ planis numerorum
Arithmeticè dispositorum ab unitate in
infinitum disposita, & aggregata sunt
æquales unitati denominatæ differentia
consequentium dispositionis Arithmeticæ.*

A	—————	C. $\frac{1}{2}$
B. 2.	D. 14.	E. 15.
H	—————	F. 7. G. $\frac{7}{15}$

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum ab unitate, quorum differentia B; & sit C, vnitas denominata per B. Dico A, æqualem esse C: alias erit A, maior, vel minor C. Sit maior; igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima unitates dispositæ in A, implent C: sit huiusmodi multitudinis numerus D, qui adiecta unitate fiat E; ergo aliquot unitates ex dispositis in A, sumptæ à prima in multitudine numeri E, sunt maiores C, quod est absurdum: igitur non est A, maior C. Sit minor, & data proportionem minoris inæqualitatis A, ad C, inueniatur altera maior, quæ sit numeri D, quem B, metiatur ad E, numerum unitate maiorem; metiatur autem B, ipsum D, per F; igitur F, ad D, est ut unitas ad B; vnitas autem ad B, est ut C, ad unitatem; ergo F, ad D, est ut C, ad unitatem; & D, ad E, maiorem habet proportionem A, ad C; ergo ex æquo in perturbata I, ad E, maiorem habet proportionem, quàm A, ad unitatem. Denominetur I, per E, ut fiat fractio G; ergo ut

E
est

Coroll. 2.
Prop. 24.

Ax. 1.

Def. 10.

Prop. 24.

Prop. 25.

est I, ad E, ita G, ad unitatem; igitur G, ad vnitatem
habet maiorem proportionem quàm A, ad eandem vni-
tatem; ergo G, maior est A. Sumantur ex vnitatibus
dispositis in A, à prima totidem secundum numerum F;
Prop. 23. & sit assumptarum extensio H: constat quòd H, est
æqualis F, denominato per E, nempe fractioni G; ergo
etiam H, maior est A, pars toto, quod est absurdum:
igitur A, non est minor C; sed neque maior. Ergo A,
est æqualis C. Quod, &c.

Aliter.

A. 1.	3.	5.	K. 7.	9.	11.
E. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{15}$			
C $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{15}$	I. $\frac{1}{22}$		
B. 2.	D. $\frac{1}{2}$	F. 3.	G. 6.	H. 7.	

Sit A, dispositio Arithmetica numerorum ab vnitatem,
quorum consequentium differentia B; & in C, sint
dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denomi-
natæ planis numerorum A; & unitas denominata per B,
fit D. Dico C, æqualem esse D. Sit E, aggregatum
quotlibet ex dispositis in C, à prima, quarum multitu-
do F; & ex F, in B, fiat G, qui auctus unitate sit H:
Prop. 23. constat E, æqualem esse F, denominato per H: inter dis-
positas in C, sit I, proximè succedens aggregatis in E; &
K, numerus ordinis eiusdem inter numeros A, cuius I,
Prop. 21. inter vnitates C: constat etiam, quod unitatum C, quæ
succeedunt ab I, sumptæ semper totidem secundum nu-
merum K, ad singulas easdem à prima sunt ut unitas ad
K; ergo colligendo, omnes C, ab I, ad omnes easdem
C, à prima sunt ut unitas ad K; ergo conuertendo, &
per conuersionem rationis, omnes C, ad assumptas in E,
sunt

sunt ut K, ad excessum K, super unitatem: & quoniam K, & I, in suis dispositionibus sunt ordinis eiusdem; est excessus K, super unitatem ad excessum consequentium B, ut multitudo aggregatarum in E, videlicet numerus F, ad unitatem; ergo excessus K, super unitatem est æqualis producto ex F, in B, videlicet numero G; & propterea, adiecta hinc inde unitate, numerus K, est æqualis H; igitur C, ad E, est ut H, ad G; & E, ad unitatem est ut F, denominatus per H, ad unitatem, videlicet ut F, ad H; ergo ex æquo in perturbata C, ad unitatem est ut F, ad G; sed quia B, multiplicando F, facit G, est ut F, ad G, ita unitas ad B; uel unitas denominata per B, videlicet D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem est ut D, ad eandem unitatem. Æquales ergo sunt C, & D. Quod, &c.

Theor. 25. Prop. 27.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmetice dispositorum ab unitate, quotlibet assumptæ ad succedentes in infinitum sunt, ut productus ex numero multitudinis ipsarum, & differentia dispositionis Arithmetice ad unitatem.

Sint A, numeri Arithmetice dispositi ab unitate quorum consequentium differentia B; & unitatum, quæ denominantur planis A, sint assumptæ à prima C, totidem, quot sunt unitates in D; & succedentes in infinitum

E 2

tum

A. 1.	3.	5.	7.	9.	11.
C. $\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{35}$	E. —	—
B. 2.	D. 3.	F. 6.	G. 7.		

Prop. 23. tum intelligantur dispositæ, & aggregatæ in E; & ex B,
 Prop. 27. in D, producat F. Dico C, ad E, esse ut F, ad unita-
 tem. Augeatur F, unitate ut fiat G: constat C, æqua-
 les esse D, denominato per G; & C, E, simul æquales
 esse unitati denominatæ per B; & quia ex ductu B, in D,
 fit F, est unitas ad B, ut D, ad F; & unitas denominata
 per B, est æqualis D, denominato per F; propterea C,
 E, simul sunt æquales D, denominato per F; ergo C, ad
 C, E, simul sunt ut D, denominatus per G, ad D, deno-
 minatum per F; uel reciprocè, ut F, ad G; & diuidendo,
 C, ad E, sunt ut F, ad unitatem. Quod, &c.

Theor. 26. Propos. 28.

*Vnitatum, quæ denominantur planis Ari-
 thmeticè dispositorum ab unitate, quotlibet
 assumptæ à prima ad ultimam assumpta-
 rum sunt, ut productum ex numero eius-
 dem ordinis cum assumpta inter Arithme-
 ticè dispositos, & numero multitudinis as-
 sumptarum ad unitatem.*

Sit in A, dispositio Arithmetica numerorum ab uni-
 tate; & unitatum, quæ denominantur planis A, sint
 quot-

A. 1. 3. E. 5. F. 7.
 B. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
 C. 3.

quotlibet assumptæ à prima B, quarum multitudo C, & ultima D, & eiusdem ordinis inter Arithmeticè dispositos numerus E. Dico B, ad D, esse ut planum C E, ad unitatem. Inter numeros A, sit F, proximus maior E. Et quoniam E, D, sunt eiusdem ordinis in suis dispositionibus; constat D, æqualem esse unitati denominatæ plano E F: quoniam etiam C, est multitudo B, sunt in ordine A, numeri ab unitate ad E, totidem, & post unitatem ad F, pariter totidem Arithmeticè dispositi; ergo excessus F, super unitatem toties continet differentiam consequentium, quot sunt unitates in C; ergo C, multiplicando differentiam consequentium producit excessum F, super unitatem cui quidem excessui adiecta unitate fit numerus F; vnde constat B, esse æquales C, denominato per F; ergo B, ad D, sunt vt C, denominatus Prop. 23. per F, ad unitatem denominatam per planum E F; & multiplicando terminos per planum E F, vt B, ad D, ita se habet planum C E, ad unitatem. Quod, &c.

Theor. 27. Propos. 29.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmeticè dispositorum ab unitate, qualibet assumpta ad succedentes in infinitum est, vt differentia consequentium ad numerum

A. 1.	3.	E. 5.	7.	9.	11
B. 2.			C. $\frac{1}{3}$	D. —	—
F. $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{15}$	G. 3.	

SIt in A, dispositio Arithmetica numerorum ab unitate, quorum differentia B; & unitatum, quæ denominantur planis A, sit assumpta C, quam succedentes in infinitum dispositæ, & aggregatæ sint in D; & eiusdem ordinis cum C, sit E, inter numeros A. Dico C, ad D, esse ut B, ad E. Sint, quæ præcedunt D, aggregatæ in F, quarum multitudo G; constat C, ad F, esse ut unitas ad planum G E; & F, ad D, est ut planum B G, ad unitatem; ergo ex æquo in perturbata C, ad D, est ut planum B G, ad planum G E; vel ut B, ad E. Quod, &c.

Prop. 28.

Prop. 27.

Theor. 28. Prop. 30.

Duarum fractionum minimis numeris expressarum, cum denominatores numeratorum sunt æquemultiplices superparticulares, maior est, qua maioribus numeris exponitur, & excessus est æqualis excessui numeratorum denominato per planum denominatorum.

Sint

A. 3.	H. 4.	B. 7.	C. 12.	D. 28.
<hr/>		<hr/>		
F. 13.		G. 29.		
L. 91.		K. 87.	I. 84:	

Sint duæ fractiones, quarum numeratorum A, B, sint æquemultiplices C, D; & adiecta singulis unitate fiant denominatores F, G, æquemultiplices superparticulares numeratorum A, B, quibus propositæ fractiones in minimis numeris exprimuntur; & sit B, maior A, per excessum H; unde fit etiã D, maior C; & addita comuni unitate, G, maior F. Dico fractionem B, per G, excedere fractionem A, per F, numero H, denominato per planum FG. Ex B, ducto in C, & F, producantur I, & K; & ex A, in G, fiat L: quia D, C, sunt æquemultiplices B, A, ut B, ad A, ita D, ad C; & idem I, qui fit ex B, in C, fiet etiam ex A, in D; igitur A, multiplicando G, D, facit K, I; & multiplicando unitatem excessum G, D, facit se ipsum A, excessum K, I: demonstrabitur eodem modo B, fieri excessum L, I: ergo excessus B, A, videlicet H, est etiam excessus L, K; sed excessus fractionum B, per G, & A, per F, est excessus L, K, denominatus plano GF; ergo excessus fractionum B, per G, & A, per F, est H, denominatus plano GF. Quod, &c.

Theor. 29. Prop. 31.

Vnitatum, quæ denominantur planis Arithmetice dispositorum ab unitate, quotlibet assum-

assumptæ ad succedentes in infinitum sunt,
ut multiplex differentia in dispositione se-
cundum multitudinem assumptarum ad
multiplicem eiusdem differentia secundum
multitudinem præcedentium à prima sem-
per auctum unitate.

A. 1.	4.	7.	B. 3.	10.	13.	16.	19.
E. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	C. $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$	G. —
F. 2.			D. 3.			L. 5.	
I. 6.	K. 7.		H. 9.			M. 16.	

Sit A, dispositio Arithmetica numerorum ab unitate;
quorum differentia B; & unitatum, quæ denomi-
nantur planis A, sint assumptæ C, quarum multitu-
do numerus D; & sint E, quæ præcedunt, quarum multitu-
do numerus F; & quæ sequuntur sint in infinitum dis-
positæ, & aggregatæ in G; & ex B, ducto in F, D, fi-
ant I, H; & I, auctus unitate fiat K. Dico C, ad G, es-
se ut H, ad K. Fiat ex F, D, aggregatum L, & ex H, K,
aggregatum M: constat L, esse multitudinem E, & C,
simul. Et quoniam ex B, ducto in F, D, facti sunt I, H;
etiam ex B, in L, fiet aggregatum ex I, H; quod auctum
unitate est aggregatum ex H, K, videlicet M: ergo M,
est productum ex L, in B, auctum unitate; & propterea
Prop. 23. C, E, simul sūt æquales L, denominato per M; & E, æqua-
lis est F, denominato per K; ergo C, est æqualis excessu
Prop. 30. sui L, F, nempe D, numero denominato per planum M
K; ergo C, ad E, C, simul est ut D, denominatus per pla-
num M K, ad L, denominatum per M; vel (multiplican-
do

do terminos per planum M B, ut planum D B, denominatum per K, ad planum B L: sunt autem E, C, simul ad G, ut planum B L, ad unitatem; ergo ex æquo C, ad G, est ut planum B D, vel H, denominatus per K, ad unitatem; sed est H, denominatus per K, ad unitatem ut H, ad K. Ergo C, ad G, est ut H, ad K. Quod, &c.

Theor. 30. Prop. 32.

Vnitates, quæ denominantur planis omnium numerorum ab vnitare binæ à prima sunt duplæ singularum unitatum, quæ denominantur planis omnium imparium ab vnitare.

A. 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
C. $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	
B. 1.	3.	5.	7.			
D. $\frac{1}{4}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{35}$		

Sint dispositiones omnium numerorum A, & omnium imparium B, ab vnitare; & vnitatum denominatarum planis A, & B, sint C, & D. Dico binas C, duplas esse singularum D, à prima. Quoniam in A, sunt omnes impares interiectis inter binos consequentes singulis paribus, concipientur singulæ dispositiones Arithmetica trium numerorum, quorum extremi impares, & medius par; igitur singula plana sub extremis imparibus, videlicet singula plana numerorum B, à primo sunt media harmonicè inter bina plana sub singulis imparibus

Prop. 1.

F bus

Prop. 3.

bus, & intermedio pari, videlicet inter bina plana numerorum A, à primo; ergo singulæ unitates planis B, denominatæ, videlicet singulæ D, à prima sunt mediæ Arithmeticè inter binas unitates planis A, denominatas, videlicet binas C, à prima. Ergo binæ C, sunt duplæ singularum D, à prima. Quod, &c.

Theor. 31. Prop. 33.

Unitates denominata planis omnium numerorum ab unitate sumpta semper totidem à prima secundum aliquem numerum ad unitates denominatas planis numerorum Arithmeticè cum eodem numero excessu dispositorum ab unitate singulas à prima sunt, ut idem numerus ad unitatem.

A	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{90}$	
						C. 3.				
D	1.			4.			7.			10.
E		$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{16}$			$\frac{1}{75}$		

Sint dispositiones A, omnium numerorum, & B, unitatum denominatarum planis A, quæ semper totidem sumantur à prima secundum numerum C; sint etiam dispositiones, una quidè D, Arithmetica numerorum ab unitate cum excessu C, & altera E, unitatum, quæ denominantur planis D. Dico quòd B, totidem semper à pri-

à prima, quot sunt vnitates in C, ad singulas E, sunt vt C, ad vnitatem. Quoniam in D, sunt numeri ab vnitate, quorum excessus C, & in A, sunt oēs numeri; igitur oēs D, sunt inter numeros A, ab vnitate semper totidem interiectis, quot sunt vnitates C, vna dempta; & propterea in A, possunt concipi ab vnitate singulæ dispositiones Arithmeticæ totidem semper terminorum, quot sunt vnitates C, vna adiecta, quorum in extremis locis sunt numeri D; & B, sumptæ semper totidem à prima, quot sunt vnitates in C, sunt vnitates denominatæ planis numerorum, qui in singulis huiusmodi dispositionibus comprehenduntur; & E, singulæ à prima sunt vnitates denominatæ planis extremorum earundem dispositionum. Ergo sumptæ B, à prima semper totidem secundum numerum C, sunt ad singulas E, à prima, vt C, ad vnitatem. Quod, &c. Prop. 8.

Theor. 32. Prop. 34.

Factis duabus Arithmeticis dispositionibus à duobus numeris, quorum sunt æquemultiplices differentia in dispositionibus; vnitates denominatæ planis numerorum earundem, cum eiusdem sunt ordinis, inter se reciprocè sunt, vt quadrati primorum numerorum.

F 2

Sint

C. 2.	D. 5.	E. 6.	F. 15.	G. 3.
A. 2.	8.	14.	20.	26.
H.	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{26}$
B. 5.	20.	35.	50.	65.
I.	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{65}$
K. 1.	4.	7.	10.	13.
L.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{13}$

Sint A, & B, duæ Arithmeticae dispositiones à numeris C, D, quarum differentiae sint E, F, æquemultiplices C, D, per numerum G; & sint H, I, vnitates denominatae planis numerorum A, B. Dico H, ad I, eiusdem ordinis esse, vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Fiat K, Arithmetica dispositio ab vnitare, in qua differentia G, cuius numerorum planis denominatae vnitates disponantur, in L. Quoniam C, metitur se ipsum primo loco dispositum in A, per vnitatem primo loco dispositam in K; & metitur E, differentiam numerorum A, per G, differentiam numerorum K; ergo componendo, C, metitur omnes A, per omnes eiusdem ordinis K; ergo L, ad H, eiusdem ordinis ita se habent vt quadratus numeri C, ad vnitatem; & conuertendo, H, ad L, ita se habent vt vnitas ad quadratum C: eadem methodo demonstrabimus, quod L, ad I, eiusdem ordinis ita se habent vt quadratus numeri D, ad vnitatem; & ex æquo in perturbata H, ad I, eiusdem ordinis ita se habent vt quadratus numeri D, ad quadratum C. Quod, &c.

Theor.

Theor. 33. Prop. 35.

Vnitates denominatae planis Arithmeticae dispositorum ab aliquo numero, sumpta ab assumpta semper totidem secundum numerum ordinis eiusdem inter Arithmetice dispositos, ad sumptas à prima semper totidem secundum primum numerum eorundem Arithmetice dispositorum sunt, ut idem primus numerus ad numerum ordinis eiusdem cum assumpta.

	B. 2.		E. 5.				
A. 2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	
C. $\frac{1}{4}$	D. $\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{48}$	
F. 3.							
G. 2.		8.		14.		20.	
I. $\frac{1}{16}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{36}$	
H. 5.						20.	
K.			$\frac{1}{16}$	&c.			

Sint A, numeri Arithmetice dispositi à B, & sint C, vnitates denominatae planis numerorum A, quarum assumpta D, & eiusdem ordinis inter Arithmetice dispositos A, sit E. Dico C, sumptas à D, semper totidem secundum numerum E, ad easdem C, sumptas à prima totidem semper secundum numerum B, esse ut B, ad

- ad E: sit F, differentia in dispositione A, & à numeris B, E, fiant Arithmeticae dispositiones G, H, quarum differentiae plana F B, F E: & vnitates denominatae planis numerorum G, H, sint I, K. Quia omnes numeri G, H, sunt inter numeros A, a B, E, semper totidem interiectis, quot sunt vnitates in B, E, vna dempta; poterunt concipi in A, singulae dispositiones Arithmeticae a B, C, totidem semper numerorum, quot sunt vnitates in B, E, vna amplius, in quarum extremis reperiuntur bini consequentes numeri dispositionum G, H: ergo vnitates denominatae planis huiusmodi singularum dispositionum Arithmeticarum ab E, cuiusmodi sunt C, sumptae à D, semper totidem secundum E, ad vnitates denominatas plano extremorum earundem, cuiusmodi sunt singulae K, à prima sunt ut E, ad vnitatem, vel ut quadratus numeri E, ad E; singulae autem K, ad singulas I, à prima sunt, ut quadratus numeri B, ad quadratum E: ergo ex æquo in perturbata C, sumptae à D, semper totidem secundum E, ad singulas I, à prima sunt, ut quadratus B, ad E; singulae autem I, utpote vnitates denominatae planis extremorum dispositionum Arithmeticarum, quae singulae concipiuntur inter numeros A, a B, ad vnitates denominatas planis consequentium earundem dispositionum, cuiusmodi sunt vnitates C, sumptae à prima semper totidem secundum numerum B, sunt ut vnitates ad B, vel ut B, ad sui quadratum: ergo ex æquo in perturbata C, sumptae à D, semper totidem secundum E, ad easdem C, sumptas à prima semper totidem secundum B, sunt ut B, ad E.
- Quod, &c.

Theor.

Theor. 34. Propos. 36.

Vnitates denominatae planis Arithmetice dispositorum sumptae à duabus assumptis totidem semper secundum numeros ordinum earundem sunt reciprocae, ut ydem numeri.

A. 2. E. 5. 8. F. 11. 14.
B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{1}{48}$ $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{144}$

Sint numeri A, dispositi Arithmetice, & B, vnitates denominatae planis eorundem, quarum sint assumptae C, D, & eorundem ordinum inter numeros A, sint E, F. Dico B, sumptas a C, semper totidem secundum numerum E, ad easdem B, sumptas a D, semper totidem secundum numerum F, esse ut F, ad E. Quoniam B, sumptae a C, semper totidem secundum numerum E, ad easdem B, sumptas a prima semper totidem secundum primum numerorum A, sunt ut idem primus ad E; item ipsae B, sumptae a prima semper totidem secundum eundem numerum primum ad easdem B, sumptas a D, semper totidem secundum numerum F, sunt ut F, ad eundem primum numerorum A; ergo ex aequo in perturbata B, sumptae a C, semper totidem secundum numerum E, ad easdem B, sumptas a D, semper totidem secundum numerum F, reciprocae sunt ut F, ad E. Quod, &c.

Theor.

Theor. 35. Propos. 37.

Vnitates denominatæ planis Arithmetice dispositorum, sumptæ quotlibet à prima sunt æquales numero multitudinis earundem denominato per productum sub eodem numero multitudinis, & primo numero, & differentia in dispositione semper auctum quadrato eiusdem primi numeri.

B. 2.	C. 3.	E. 4.	G. 24.	H. 28.	F. $\frac{1}{7}$
A. 2.	5.	8.	K. 11.	L. 14.	17.
D. $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	I. $\frac{1}{14}$	$\frac{1}{17}$

Sint A, numeri Arithmetice dispositi à B, cum differentia C; & sint D, unitates denominatæ planis numerorum A, quarum sumptæ quotlibet à prima secundum multitudinem E, sint aggregatæ in F; & ex E, in planum BC, ducto sit productus G, qui auctus quadrato B, sit H. Dico quod F, est æqualis E, denominato per H. Sit I, vltima sumptarum in F; & K, inter numeros A, eiusdem ordinis, cui proximus maior L: constat F, ad vnitatem denominatam plano BL, se habere vt E, ad vnitatem; ergo F, est æqualis E, denominato per planum BL: quoniam, quot sunt vnitates in E, tot sunt aggregatæ in F; totidemque sunt plana numerorum A, vsque ad L; necnon totidem sunt excessus æquales ipsi C, inter extremos L, B: ergo excessus L, B, ad C, est vt E, ad

ad unitatem; & propterea excessus L, B, est æqualis plano C E; & L, est compositus ex plano C E, & numero B; & (multiplicando per B,) planus B L, est compositus ex producto B, in planum C E, & ex quadrato B; huiusmodi autem est etiam numerus H; ergo planus B L, est æqualis H: ergo F, est æqualis E, denominato per H. Quod, &c.

Theor. 36. Propos. 38.

Vnitates denominatæ planis Arithmetice dispositorum, quotlibet aggregatæ à prima sunt minores unitate denominata plano primi numeri, & differentia dispositionis Arithmetica.

A. 5. C. 2. D. 3. E. 6. F. 30. G. 34.
 $B \frac{1}{15} \quad \frac{1}{55} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{115} \quad \frac{1}{215}$

Sint in B, sumptæ à prima secundum numerum A, quotlibet vnitates denominatæ planis numerorum Arithmetice dispositorum à C, cum differentia D; & fiat E, planum C D. Dico B, minorem esse unitate denominata per E. Ex A, in E, ducto fiat F, qui auctus quadrato C, sit G: quia G, maior est F, habet A, ad G, proportionem minorem, quam ad F; sed, cum F, sit productus ex A, in E, vt A, ad F, ita est vnitas ad E; ergo A, ad G, minorem habet proportionem, quam vnitas ad E; & A, denominatus per G; minor est unitate denominata per E; est autem B, æqualis A, denominato per G; Prop. 37. ergo B, minor est unitate denominata per E. Quod &c.

G

Corol.

Corollarium Primum.

Prop. 15. *Vnde constat unitates denominatas planis numerorum Arithmetice dispositorum in infinitum dispositas, & aggregatas esse finita extensionis.*

Corollarium Secundum.

Prop. 16. *Constat etiam, quod unitates denominatae planis numerorum Arithmetice dispositorum sunt in aliqua multitudine à prima, quae implent quamlibet propositam extensionem minorem extensione dispositarum earundem in infinitum.*

Probl. 3. Prop. 39.

Data proportione minoris inaequalitatis alteram inuenire maiorem data, quae sit inter numeros, quorum minor sit multiplex dati, & maior minorem excedat altero dato.

Sit

A. 23.	C. 3.	E. 6.	G. 42.
B. 29.	D. 7.	F. 7.	H. 49.

SIt data proportio minoris inæqualitatis A, ad B; datiq; numeri C, & D; oportet inuenire alteram proportionem minoris inæqualitatis maiorem data A, ad B, quæ sit inter numeros, quorum minor sit multiplex C, & maior minorem excedat per D. Inueniatur proportio maior data A, ad B, quæ sit numeri E, quem datus C, metiatur ad numerum F, vnitatem maiorem; & D, multiplicando E, F, faciat G, H. Dico proportionem G, ad H, esse quæsitam. Est enim vt E, ad F, ita G, ad H, proportio minoris inæqualitatis maior data A, ad B; & quia C, metitur E; & E, metitur G; ergo C, metitur G; & conuertendo, G, est multiplex C: quia E, ad F, est vt G, ad H; diuidendo, E, ad vnitatem est vt G, ad excessum H, G; & permutando, E, ad G, est, vt vnitatem ad excessum H, G; sed (cum D, multiplicando E, fecerit G,) vt E, ad G, ita est vnitatem ad D; ergo vnitatem ad excessum H, G, est vt vnitatem ad D; igitur D, est excessus H, G: inuenta est ergo proportio minoris inæqualitatis G, ad H, maior data A, ad B, in qua minor numerus G, est multiplex dati C, & maior H, excedit G, per alterum datum D. Quod facere, &c.

Prop. 1.

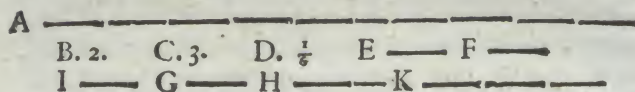
Theor. 37. Prop. 40.

Vnitates denominate planis Arithmetice dispositorum dispositæ in infinitum, et aggregatæ sunt æquales vnitati denominate p productum

G 2

etum

*Etum numeri primi in Arithmetica dispositio-
ne, & differentia consequentium.*



S Int in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ planis Arithmeticè dispositorum à B, cum differentia C; & sit D, vnitas denominata plano B C. Dico A, esse æqualem D. Alias erit A, maior, vel minor D: sit maior; igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima vnitates dispositæ in A, implent D: sit huiusmodi multitudinis numerus E, qui adiecta unitate fiat F; ergo aliquot vnitates A, sumptæ in multitudine F, sunt minores D, quod est absurdum; igitur non est A, maior D. Sit minor, & data proportionem minoris inæqualitatis A, ad D, inueniatur altera minoris inæqualitatis maior data, quæ sit numeri G, multiplicis plani B C, ad numerum H, excedentem ipsum G, quadrato numeri B; sit autem G, multiplex plani B C, secundum I; & vnitarum denominatarum in A, sumantur a prima totidem secundum numerum I; & sumptarum sit aggregatum K; constat K, æqualem esse I, denominato per H; & quoniam I, multiplicando planum B C, facit G; ergo vt vnitas ad planum B C, ita se habet I, ad G; sed vnitas ad planum B C, est vt D, ad unitatē; ergo vt I, ad G, ita est D, ad unitatem; & G, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad D; ergo ex æquo in perturbata I, ad H, maiorem habet proportionem, quam A, ad unitatem; sed vt I, ad H, ita est K, ad unitatem; ergo K, ad unitatem habet maiorem proportionem.

portionem quam A, ad eandem vnitatem, maior ergo est K, quàm A, pars, quàm totum, quod est absurdum: non est ergo A, maior D, neque minor. Ergo A, æqualis est ipsi D. Quod, &c.

Idem Aliter.

B. 2.		C. 3.			
A. 2.	5.	F. 8.	11.	14.	17.
D.	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{45}$	E $\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

Sint A, numeri Arithmetice dispositi à B, cum differentia C; & D, vnitates denominatæ planis A, in infinitum dispositæ, & aggregatæ. Dico D, æquales esse vnitati denominatæ plano B C. Sumantur D, à prima tot, quot sunt vnitates in B, & assumptas proximè sequatur E, cuius ordinis inter numeros A, sit F; & ab E, sumantur D, totidem semper secundum numerum B, sicut à prima; & iterum ab eadem E, sumantur totidem semper secundum numerum F: quia D, sumptæ ab E, secundum F, semper totidem ad easdem D, sumptas à prima secundum B, semper totidem sunt vt B, ad F; ergo colligendo, omnes D, ab E, ad omnes D, sunt vt B, ad F; & per conuersionem rationis primæ sumptæ D, à prima secundum numerum B, ad omnes D, à prima sunt vt excessus F, B, ad F; est autem excessus F, B, toties multiplex excessus C, quot sunt primæ sumptæ D, videlicet secundum numerum B; quare excessus F, B, est æqualis plano B C; & F, est compositus ex plano B C, & B; sumptæ vero primæ D, secundum numerum B, sunt æquales B, denominato per productum ex B, & plano B C; auctum quadrato B; videlicet diuidendo per B, vnitati denominatæ per planum B C, auctum B, vel

Prop. 35.

Prop. 37.

uel unitati denominatæ per F; ergo unitas denominata per F, ad D, est ut planum B C, ad F; uel ut unitas denominata per F, ad unitatem denominatam plano B C: ergo sunt æquales D, & unitas denominata plano B C. Quod, &c.

Theor. 38. Prop. 41.

Unitates denominatæ planis Arithmetice dispositorum quotlibet assumptæ a prima ad succedentes in infinitum sunt, ut planum sub numero assumptarum, & differentia dispositionis Arithmetica ad primum eiusdem dispositionis numerum.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{A.} & \frac{1}{16} & \text{B. } 2. & \frac{1}{8} & \text{C. } 3. & \frac{1}{16} & \text{D. } 4. \\ & & \frac{1}{8} & \text{E. } \frac{1}{7} & & \text{F.} & \end{array}$$

Sint A, unitates denominatæ planis Arithmetice dispositorum à B, cum differentia C; quarum assumptæ à prima quotlibet secundum numerum D, sint compositæ in E; & reliquæ in infinitum dispositæ sint in F,

Prop. 8. Dico E, ad F, esse ut planum C D, ad B. Sunt enim E, æquales D, denominato per productum ex D, & plano

Prop. 19. B C, auctum quadrato B; & A, æquales unitati denominatæ plano B C; ergo E, ad A, sunt ut D, denominatus per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam plano B C; & di-

uidentur.

uidendo per D, ut unitas denominata per productum ex D, & plano B C, auctum quadrato B, ad unitatem denominatam per productum ex D, & plano B C; uidelicet ut productum ex D, & plano B C, ad seipsum auctum quadrato B; & diuidendo per B, ut productum ex D, in C, ad se ipsum auctum numero B; & diuidendo, E, ad F, sunt ut planum D C, ad B. Quod, &c.

Theor. 39. Prop. 42.

Vnitatum denominatarum planis Arithmetice dispositorum quotlibet assumpta à prima ad ultimam assumptarum sunt, ut planum numeri multitudinis assumptarum, & numeri ordinis eiusdem cum assumpta inter Arithmetice dispositos ad eorundem primum.

C. 2.	5.	8.	11.	F. 14.	G. 17.	D. 3.
B. $\frac{1}{15}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{45}$	E. $\frac{1}{55}$		A. 5.

S Int secundum numerum A, totidem in B, dispositæ unitates denominatæ planis numerorum Arithmetice dispositorum a C, cum differentia D, quarum assumptarum ultima E; & eiusdem ordinis inter Arithmetice dispositos sit F, quem sequatur G. Dico B, ad E, se habere ut planum A F, ad C. Quoniam B, sunt æquales A, denominato per productum ex A, & plano C D, auctum quadrato C; & E, est unitas denominata plano

Prop. 37.

Prop. 37,

no

no F G; productum autem ex A, & plano C D, auctum quadrato C, est planum C G; ergo B, ad E, sunt ut A, denominatus plano C G, ad unitatem denominatam plano F G; & multiplicando per G, ut, A denominatus per C, ad unitatem denominatam per F; & diuidendo per A, ut unitas denominata per C, ad unitatem denominatam per planum A F; uidelicet ut planum A F, ad C. Quod, &c.

Theor. 40. Propos. 43.

Vnitatum, quę denominantur planis Arithmetice dispositorum, qualibet assumpta ad succedentes in infinitum est, ut differentia ad numerum ordinis assumpta inter Arithmetice dispositos.

A. 2. 5. 8. 11. D. 14. B. 3.
F. $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{45}$ $\frac{1}{85}$ $\frac{1}{125}$ C. $\frac{1}{215}$ E ——— G. 5.

Vnitatum, quę denominantur planis Arithmetice dispositorum ab A, cum differentia B, sit assumpta C, cuius ordinis inter Arithmetice dispositos numerus D; & succedentes ipsi C, sint dispositę in infinitum, & aggregatę in E; quę uerò præcedunt unā cum eadem assumpta sint compositę in F, quarum multitudo G. Dico C, ad E, se habere uti B, ad D. Quoniam C, ad F, est ut A, ad planum G D; & F, ad E, sunt ut planum G B, ad A; ergo ex æquo in perturbata C, ad E, est ut planū G B, ad planū G D; & diuidēdo per G, ut B, ad D. Quod, &c.

Theor.

Theor. 41. Prop. 44.

Duarum fractionum, cum denominatores eodem numero excedunt æquemultiplices numeratorum, maior est, quæ maioribus numeris exprimitur, & excessus est fractio, in qua productum eiusdem numeri & differentia numeratorum denominatur plano denominatorum.

I. 5.	L. 3.	K. 2.
A $\frac{\quad}{\quad}$		B $\frac{\quad}{\quad}$
C. 34.	E. 4.	D. 16.
G. 30.	H. 12.	

Sint duæ fractiones A, B, quarum denominatores C, D, superant eodem numero E, numeros G, H, æquemultiplices numeratorum I, K; & I, excedat K, per L; ergo G, excedit H; & adiecto E, communi, etiam C, excedit D. Dico A, maiorem esse B. Quia G, H, sunt æquemultiplices I, K; ergo I, ad G, est vt K, ad H; & quia G, maior est H, maiorem habet proportionem G, ad E, quàm H, ad E; & componendo, G, ad C, quàm H, ad D; & ex æquo I, ad C, quam K, ad D; ergo fractio A, maior est B. Dico præterea excessum esse planum L E, denominatum plano C D. Quoniam I, ad K, est vt G, ad H; planum I H, plano K G, est æquale: & quoniam E, est excessus D H; planum I E, est excessus

H
sus

sus planorum ID, IH , vel ID, KG : & eadem ratione planum KE , est excessus planorum KC, HG ; ergo idem est excessus tum planorum ID, KC , tum etiam planorum IE, KE ; cum autem L , sit excessus I, K ; ergo LE , est excessus planorum IE, KE ; videlicet excessus planorum ID, KC ; sed excessus A, B , est æqualis excessui planorum ID, KC , denominato per planum DC ; ergo excessus A, B , est planum LE , denominatum plano DC , Quod, &c.

Theor. 42. Prop. 45.

Vnitatum, quæ denominantur planis dispositorum Arithmetice, quolibet assumptæ ad succedentes in infinitum sunt, ut multiplex differentia in Arithmetica dispositione secundum multitudinem assumptarum ad multiplicem eiusdem differentia secundum multitudinem præcedentium auctum primo eiusdem dispositionis numero.

B. 4.	C. 5.	Q. 70.
G. 2.	D. 3.	M. 5. N. 116.
F. $\frac{1}{36}$	A. $\frac{1}{216}$	E. $\frac{1}{696}$
I. 10.	K. 15.	L. 14.

Sint A , assumptæ vnitates denominatæ planis numerorum Arithmetice dispositorum à B , cum differentia

tia C; & multitudo A, sit D; & sint E, infinitæ succe-
dentes ipsis A; & F, præcedentes, quarum multitudo
G; & ex ductu C, in G, D, fiant I, K; & I, auctus B,
sit L. Dico A, ad E, se habere ut K, ad L. Fiat M, ag-
gregatum numerorum G, D; & N, productum B C M,
auctum quadrato B. Constat F, A, simul æquales esse *Prop. 37.*
M, denominato per N: ducatur etiam B, in L, & fiat
Q: quia L, est compositus ex B, I; videlicet ex B, & pla-
no G C; etiam Q, compositus est ex producto B C G, &
ex quadrato B: constat pariter F, æquales esse G, deno- *Prop. 37.*
minato per Q; & A, excessui dictarum fractionum, vide- *Prop. 44.*
licet producto sub D, & quadrato B, denominato per
planum QN; ergo A, ad F, A, simul sunt ut productum
ex D, & quadrato B, denominatum per QN, ad M,
denominatum per N; & multiplicando per N C, ut pro-
ductum ex plano D C, & quadrato B, denominatum per
Q, ad planum M C; sunt autem F, A, simul ad E, ut M *Prop. 41.*
C, ad B; ergo ex æquo A, ad E, sunt ut productum ex
plano D C, & quadrato B, denominatum per Q, ad B;
& diuidendo per B, ut productum DCB, denominatū
per Q, ad unitatem; videlicet ut productū DCB,
ad Q; est autem K, æqualis plano D C; & Q,
æqualis plano B L; ergo A, ad E, sunt
ut productum K B, ad produ-
ctum B L; & diuidendo
per B, ut K, ad L.
Quod, &c.



Finis Libri Primi.

N O V Æ
 QVADRATVRÆ
 ARITHMETICÆ.

S E V

De Additione Fractionum

LIBER SECVNDVS,

In quo de Fractionibus agitur, quas denominant numeri solidi. Demonstrantur Additiones in propositionibus 4. 5. 13. 20. Quadraturæ verò in 8. 15. 23. 27.

Theorema 1. Propositio 1.

Si quatuor magnitudines binæ se æqualiter exceſſerint, planum sub maioribus excedit planum sub minoribus plano sub eodem exceſſu, & aggregato maxima, & minima.

Sit E, exceſſus A, B, æqualis exceſſui C, D. Dico exceſſum planorum A C, B D, æqualem eſſe plano sub E, & aggregato A, D. Quoniam E, eſt exceſſus C, D;

E. 3.

A. 5. B. 2.

C. 7. D. 4.

C, D; planum E A, est excessus planorum CA, DA: & quoniam E, est excessus A, B; planum E D, est excessus planorum DA, DB; ergo colligendo plana EA, ED, simul sunt equalia excessibus planorum CA, DA, DA, DB; videlicet vni excessui planorum CA, B D; plana verò E A, E D, sunt equalia plano sub E, & aggregato A, D; ergo excessus planorum CA, B D, est equalis plano sub E, & aggregato A, D. Quod, &c.

Theor. 2. Prop. 2.

Numerorum Arithmetice dispositorum aggregatum est equalis dimidio plani sub multitudine, & aggregato extremorum.

A. 2. 5. 8. 11. 14. B. 17.

C. 4. D. 2.

Sint numeri Arithmetice dispositi, quorum primus A, vltimus B, & multitudo C. Dico aggregatos equalles esse dimidio plani sub C, & aggregato A, B. Sit primo C, par cuius dimidium D; quoniam numeri A, B, & intermedij totidem sunt, quot vnitates in C; ergo bini totidem sunt, quot vnitates in D; bini autem tum extremi A, B, tum ab extremis equaliter distantes inter se sunt equalles; ergo omnes aggregati sunt ad aggregatum extremorum A B, vt D, ad vnitatem; & omnes aggregati sunt equalles plano sub D, & aggregato extremorum; videlicet dimidio plani sub C, & aggregato A, B.

Sed

A. 2. 5. 8. 11. B. 14. C. 5. D. 4. E. 8.

Sed esto C, impar, & vnitatem dempta fiat D, par: quia excessus extremorum est multiplex excessus consequentium per D; ergo excessus extremorum A, B, est par; & duplum A, est par; ergo aggregatum extremorum A, B, est par; cuius dimidium sit E: igitur E, medius est inter Arithmetice dispositos ab A, ad B; & ad E, bini tunc extremi A, B, aggregati, tunc æqualiter distantes ab extremis dupli sunt; ergo omnes aggregati præter E, ad E, sunt ut D, ad vnitatem; & componendo omnes ad E, sunt ut C, ad vnitatem; ergo omnes aggregati sunt æquales plano sub E, & C; dimidio videlicet plani sub aggregato A, B, & C. Quod, &c.

Theor. 3. Prop. 3.

Dispositis Arithmetice quocunque numeris, differentia planorum sub primis, & ultimis ad aggregatum omnium præter primum, & ultimum sunt, ut duplum excessus ad vnitatem.

A. 2. B. 5. 8. 11. 14. 17. C. 20. D. 23.
E. 3. F. 18. G. 6. H. 3.

Numerorum Arithmetice dispositorum duo primi sint A, B, duo ultimi C, D, & consequentium excessus E. Dico differentiam planorum DC, AB, esse ad

ad omnium aggregatum præter A, D, vt duplus E, ad unitatem. Quoniã sunt æquales excessus D, C, B, A, vicissim etiã sunt æquales excessus D, B, C, A; sit F, excessus D, B, vel C, A; ergo excessus planorum D C, AB, est planum sub I, & aggregato A, D, vel B, C: sit G, multitudo omnium præter A, D, cuius dimidium H; ergo aggregatum omnium præter A, D, est planum sub H, & aggregato B, C; & est planum sub F, & aggregato B, C, ad planum sub H, & aggregato B, C, vt F, ad H: & quoniam F, toties continet E, quot G, unitates; ergo F, ad G, est vt E, ad unitatem; est autem G, ad H, duplus; videlicet vt duplus E, ad E; ergo ex æquò in perturbata F, ad H, est vt duplus E, ad unitatem; ergo excessus planorum D C, A B, ad aggregatum omnium præter A, D, est vt duplus E, ad unitatem, Quod, &c.

Prop. 1.2.

Prop. 2.2.

Theor. 4. Propos. 4.

Dispositis Arithmetice quotcunque numeris, unitates denominatæ solidis eorundem consequentium sunt æquales aggregato ex intermedijs dispositis denominato per planoplanum ex binis extremis.

Sint unitates quotcunque A, denominatæ solidis consequentium Arithmetice quomodolibet dispositõrũ. Dico A, æquales esse aggregato eorundem dispositõrum præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Sint B, totidem excessus alternorum in eadem dispositione iisdem solidis denominati: & quia con-

	3.	5.	7.	9.	11.	13.
A.		$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{11}{22}$	
B.		$\frac{5}{10}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{11}{22}$	

consequentium Arithmetice dispositorum excessus sunt æquales; etiã alternorum excessus æquales inter se sunt; & singuli dupli sunt ad excessum consequentium; ergo singulæ B, ad singulas A, sunt vt duplum excessus consequentium ad vnitatem; & colligendo omnes B, ad omnes A, sunt vt duplum excessus consequentium ad vnitatem; videlicet, vt excessus planorum sub binis extremis ad aggregatum omnium dispositorum præter extremos; & diuidendo per planoplanum ex binis extremis, vt excessus planorum sub binis extremis eorumdem planoplano denominatus ad aggregatum omnium præter extremos pariter denominatum: sunt autem omnes B, æquales excessui planorum sub binis extremis eorumdem planoplano denominato; ergo omnes A, sunt æquales aggregato omnium præter extremos denominato per planoplanum binorum extremorum. Quod, &c.,

Theor. 5. Propos. 5.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium consequentium ab vnitatem, quotlibet à prima sunt æquales producto numeri multitudinis ipsarum in numerum ternario maiorem, denominato per quadruplum eiusdem producti, addito semper 8.

Sint

A. 1. 2. E. 3. D. 4. C. 5. F. 6.
 B. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$
 G. 18. I. 80. K. $\frac{1}{15}$ L. 9. M. 40.

Sint A, numeri consequentes ab vnitrate; & B, vnitates denominatæ solidis consequentium A; & numerus multitudinis B, sit E; qui ternario auctus fiat F; & productum ex E, in F, sit G; cuius quadruplum auctum numero 8, sit I; & ex denominatione G, per I, fiat fractio K. Dico, quod aggregatum omnium B, est æquale K. Numerorum A, sint D, C, duo, qui sequuntur E: quoniam numeri A, terni denominant singulas B; ergo multitudo numerorum A, qui denominant B, binario superat multitudinem B; videlicet numerum E; est autem C, qui binario excedit E; ergo C, est multitudo numerorum A, qui denominant B; & sunt in A, omnes numeri ab vnitrate; ergo dispositorum in A, vsque ad C, sunt vltimi C, D; primi vnitatis, & 2; & extremi vnitatis, & C: sit M, planoplanum sub D, C, 2. & vnitatis; & L, sit aggregatum reliquorum, præter vnitatem, & C; ergo B, sunt æquales L, denominato per M: & quia C, binario, & F, ternario excedunt E; ergo F, excedit C, vnitatis; & F, æqualis est C, & vnitatis; vel D, & binario; ergo planum EF, videlicet numerus G, duplus est L: item excessus plani DC, super binarium (planum videlicet vnitatis, & binarij) duplus est eiusdem L; ergo G, est excessus plani DC, super binarij; & planum DC, excedit G, per binarij; & quadruplum DC, excedit quadruplum G, per 8: est autem I, qui excedit quadruplum G, per 8: ergo I, est quadruplum plani DC, vel duplum planoplani sub D, C, 2. & vnitatis: ergo I, est duplum M; & G, ad L, est vt I, ad M. & permutando, G, ad I, est vt L, ad M; ergo L, denominatus per M, videlicet aggregatum omnium B, est æquale G, denominato per I, videlicet fractioni K. Quod, &c.

Prop. 4.2.

Prop. 2.2.

Prop. 3.2.

I

Theor.

Theor. 6. Propos. 6.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium consequentium ab vnitare, quotlibet assumptæ à prima sunt minores quarta parte vnitatis.

1.	2.	3.	D. 4.	5.	6. B. 7.	A. 28.
C.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	E. 112. F. 120.

Sint C, quotlibet vnitates denominatæ solidis omnium cōsequentium ab vnitare sumptæ in multitudine numeri D. Dico C, aggregatas minores esse quarta parte vnitatis. Fiat B, ternario maior D; & planum B D, sit A; cuius quadruplus E; qui auctus numero 8. sit F: ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & est A, ad E, vt vnitatis ad 4. ergo A, ad F, minorem habet, quàm vnitatis ad 4. & A, denominatus per F, est minor quarta parte vnitatis; sunt autē C, aggregatæ æquales A, denominato per F; ergo C, aggregatæ sunt minores quarta parte vnitatis. Quod, &c.

Prop. 5. 2.

Corollarium Primum.

Pr. 15. 1. Vnde constat vnitates, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab vnitare dispositæ.

*positas in infinitum, & aggregatas esse
finita extensionis.*

Corollarium Secundum.

*Pater etiam, quod unitates denominate soli- Pr. 16.1.
dis omnium numerorum ab unitate sunt
in aliqua multitudine à prima, qua im-
plent quamlibet propositam extensionem
minorem extensione dispositarum earum-
dem in infinitum.*

Probl. 1. Prop. 7.

*Datis duobus numeris alium inuenire, qui
non minorem uno dato metiatur per se
ipsum auctum altero dato.*

A. 53. M. 3. E. 15. F. 12. G. 6.
B. 212. C. 221. D. 221. H. 6. K. 9. L. 54.

S Int dati A, M: oportet numerum inuenire, qui non
minorem dato A, metiatur per seipsum auctum dato
M. Fiat B, dati A, quadruplus; & C, summa ex qua-
drato M, & B; & numeri C, sumatur latus, vel radix
qua-

1 2

qua-

A. 53. M. 3. E. 15. F. 12. G. 6.
B. 212. C. 221. D. 221. H. 6. K. 9. L. 54.

quadrata D; & sit numerus E, non minor D; à quo subtrahatur M; & residui F, dimidium sit G; & H, sit numerus non minor G. Dico H, metiri numerum non minorem A, per seipsum auctum numero M; fiat K, aggregatum ex H, & M; & ex ductu H, in K, fiat L; ergo L, est compositus ex quadrato H, & plano MH: & quoniam H, non est minor G; & est duplus G, æqualis F; & F, auctus M, est E; & E, non est minor D; ergo duplus H, auctus M, non est minor D; & quadratum dupli H, aucti M, non est minus C; est autem quadratum dupli H, aucti M, equale quadrato M, quadruplo quadrato H, & quadruplo plano MH; & sunt quadruplum quadratum H, & quadruplus planus MH, æquales quadruplo L; ergo quadratum dupli H, aucti M, est æquale quadrato M, & quadruplo L; ergo quadratum M, & quadruplus L, non sunt minores C; & ablato communi quadrato M, quadruplus L, non est minor B; & diuidendo per 4. numerus L, non est minor A. Inuenimus ergo numerum H, qui metitur L, numerum non minorem A, per seipsum auctum numero M. Quod, &c.

Theor. 7. Prop. 8.

Vnitates denominata solidis omnium numerorum ab unitate in infinitum disposita, & aggregata sunt æquales quarta parti unitatis.

Sint

A ————— B — C —
I ————— D — E — F — G — H —

Sint in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ vnitates denominatæ solidis omnium numerorum ab vnitate. Dico A, æqualem esse $\frac{1}{4}$. Alias erit A, maior, vel minor $\frac{1}{4}$. sit maior; igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima vnitates in A, dispositæ implent $\frac{1}{4}$. sit huiusmodi multitudinis numerus B, qui adiecta vnitate fiat C; ergo aliquot vnitates in A, dispositæ sumptæ à prima in multitudine numeri C, sunt maiores $\frac{1}{4}$. quod est absurdū: Non est igitur A, maior $\frac{1}{4}$. Sit minor, & data proportione minoris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{4}$, inueniatur altera maior, quæ sit numeri I, quem numerus 4. metiatur per D, ad E, vnitate maiorem; & ipsius D, sit octuplus F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non minorem F, per se ipsum auctum ternario; & sumantur vnitates in A, dispositæ à prima in multitudine numeri G; & assumptarū summa sit H: constat H, esse portionem ipsius A; & æqualem productio ex numero G, in se ipsum ternario auctum denominato per quadruplum eiusdem producti addito 8. quia autem productum ex G, in se ipsum ternario auctum non est minus F; etiam denominatum per quadruplum eiusdem producti addito 8, non est minus F, denominato per quadruplum F, addito 8; & (diuidendo vtrumque numerum fractionis per 8.) non est minus D, denominato per quadruplū D, auctū vnitate; ergo H, non est minor, D, denominato per quadruplum D, auctum vnitate; est autem I, quadruplus D; & I, auctus vnitate est E; ergo H, non est minor D, denominato per E: sed quia D, ad I, est vt vnitas ad 4; vel $\frac{1}{4}$ ad vnitatem; & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad $\frac{1}{4}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus per E, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quam A; maior igitur

Cor. 2.
Prop. 9. 2.

Prop. 9. 2.
Pr. 25. 1.

Prop. 7. 2.

Prop. 5. 2.

Pr. 44. 1.

igitur est D, denominatus per E, quam A; & non est H, minor D, denominato per E; ergo H, est maior A, pars, toto; quod est absurdum: non igitur A, minor est $\frac{1}{2}$; neque maior; ergo A, est æqualis $\frac{1}{2}$. Quod, &c.

Theor. 8. Propos. 9.

Vnitatum, quę denominantur solidis omnium numerorum consequentium ab unitate, quotlibet assumptę à prima ad succedentes in infinitum sunt, ut productum ex numero multitudinis ipsarum in se ipsum ternario auctum ad binarium.

A

 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

E

B. 2.

C. 5. D. 10. F. 48.

Vnitatum denominatarum solidis omnium numerorum consequentium ab unitate sint A, assumptę à prima in multitudine B; & residuę in infinitum sint dispositę, & aggregatę in E; & B, ternario auctus sit C; & ex B, in C, fiat D. Dico A, ad E, esse ut D, ad binarium. Fiat F, quadruplum D, auctum 8: constat A, æqualem esse D, denominato per F; & aggregatas A, E, æquales esse vnitati denominatę per 4. sed quia, ut unitas ad 4. ita se habet D, binario auctus ad F; unitas denominata per 4; videlicet aggregatę A, E, sunt æquales D, binario aucto denominato per F; ergo A, ad aggregatas A, E, est ut D, denominatus per F, ad D, binario

rio auctum denominatum per F; & (multiplicando per F,) vt D, ad D, binario auctum; ergo diuidendo, A, ad E, est vt D, ad binarium. Quod, &c.

Theor. 9. Prop. 10.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab vnitare, quotlibet assumptæ à prima ad vltimā assumptarum sunt, vt aggregatum ex cubo numeri multitudinis ipsarum, & triplo quadrati eiusdem ad quaternarium.

A $\frac{1}{4}$ B. 4. E. 5. F. 6. D. 7.
C $\frac{1}{16}$

S Int vnitatum, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab vnitare, quotlibet assumptæ A, secundum numerum B; & vltima assumptarum sit C. Dico A, ad C, esse vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Sit D, numerus ternario maior B; & sint E, F, qui proximè succedunt ipsi B, in ordine omnium numerorum ab vnitare: constat F, E, dispositos esse Arithmetice, vt binarius, & vnitatis; & permutando, F, & binarium esse Arithmetice, vt E, & vnitatis; & communem excessum esse B; ergo planum FE, excedit planum sub binario, & vnitare, plano sub B, & aggregato ex F, & vnitare; videlicet plano BD; ergo planum BD, auctum binario est æquale plano FE: & quia B, est multitudo ipsa-

Prop. 1.1.

B. 4. E. 5. F. 6. D. 7. A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ E. $\frac{1}{5}$ F. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{12}$

Prop. 5. s. ipfarum, A; ergo A, sunt æquales plano B D, denominato per quadruplum B D, auctum 8; sed quadruplum B D, auctum 8 est quadruplum plani B D, aucti 2; videlicet plani E F; ergo A, sunt æquales plano B D, denominato per quadruplum E F: quia etiam B, est numerus multitudinis A, quarum vltima C; constat B, esse numerum ordinis C; & binario, ac vnitatem minorem esse numeris, qui solidum produciunt denominatorem C; ergo C, est vnitatem denominata solido sub B, & plano E F; ergo A, ad C, est vt planum B D, denominatum quadruplo plani E F, ad vnitatem denominatam solido sub B, & plano E F; & multiplicando per planum E F, vt planum B D, denominatum per 4. ad vnitatem denominatam per B; & iterum multiplicando per B, vt solidum sub quadrato B, & D; videlicet aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, denominatum per 4. ad vnitatem; & multiplicando per 4, vt aggregatum ex cubo B, & triplo quadrati B, ad 4. Quod, &c.

Theor. 10. Prop. 11.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium numerorum consequentium ab vnitatem, qualibet assumpta ad succedentes in infinitum est, vt binarius ad numerum ordinis assumpta.

Sint

tium in numerum ternario maiorem auctum binario.

A. 2. B. 3. M. 5. P. 8. E. 40. F. 168.
 G. $\frac{1}{2}$ H. $\frac{1}{3}$ I. $\frac{1}{15}$ K. 30. L. 12. O. 5. C. 10. D. 48.

V Nitatum, quæ denominantur solidis omnium numerorum ab unitate sint assumptæ H, non à prima in multitudine numeri B; quibus in infinitum succedentes I; & præcedentes G, in multitudine numeri A; & productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA, sit K; sit etiam O, ternario maior A, & planus AO, sit C, qui auctus binario fiat L. Dico H, ad I, esse ut K, ad L. Fiat M, aggregatum ex A, B; & P, ternario maior M; & planus PM, sit E; cuius quadruplus auctus numero 8. sit F: ergo M, est multitudo ipsarum G, H; & sunt G, H, æquales E, denominato per F: fiat etiam D, quadruplus L: quoniam L, excedit C, per binarium; etiam D, excedit quadruplum C, per 8; ergo G, sūt æquales C, denominato per D; ergo excessus G, & H, supra G, videlicet H, sunt æquales excessui numeri E, denominati per F, supra numerum C, denominatum per D: & quia D, F, excedunt per 8. quadruplos C, E; ergo excessus fractionū E, per F, & C, per D, est octuplus excessus E, C, denominatus per planum D F: quoniam etiam 3. est idem excessus tum P, M, tum O, A; vicissim excessus P, O, est æqualis excessui M, A; videlicet numero B; ergo excessus planorum PM, OA, videlicet excessus E, C, est æqualis plano sub B, & aggregato A, P; est autem P, æqualis M, & 3; & M, æqualis A, & B; ergo aggregatum A, P, est aggregatum ex B, 3, & duplo A; & planum sub B, & aggregato A, P, est aggregatum ex qua-

quadrato B, triplo B, & duplo plani A B; videlicet productus ex B, in numerum ternario maiorem auctus duplo plani BA; cuiusmodi est numerus K; ergo K, est excessus E, C; & H, sunt æquales octuplo K, denominato per planum DF; ergo H, ad H, G, sunt vt octuplus K, denominatus plano DF, ad E, denominatum per F; & multiplicando per F, vt octuplus K, denominatus per D, ad E; sunt autem G, H, ad I, vt E, ad 2: ergo ex æquo Prop. 9.2.
H, ad I, sunt vt octuplus K, denominatus per D, ad 2; & diuidendo per 2, vt quadruplus K, denominatus per D, ad vnitatem; vel vt quadruplus K, ad D; ergo (quia D, est quadruplus L, diuidendo etiam per 4) H, ad I, sunt vt K, ad L. Quod, &c.

Theor. 12. Prop. 13.

Vnitates denominata solidis omnium imparium ab vnitare, quotlibet assumpta à prima sunt æquales producto numeri multitudinis ipsarum in numerum binario maiorem, denominato per duodecuplum eiusdem, addito semper 9.

Sint A, impares ab vnitare; quorum solidis denominatæ sint vnitates B; quarum multitudo à prima fit numerus C; & C, auctus binario fiat D; & planus CD, fit E; cuius duodecuplus auctus 9 fit G; & ex denominatione E, per G, fiat fractio H. Dico B, esse æquales H. Sint I, K, ultimi, qui adhibentur in denominatione

$$\frac{K}{2} \qquad B;$$

A. 1.

3.

5.

I. 7. K. 9.

B

 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{7}$

C. 3.

D. 5.

E. 15.

G. 189. H. $\frac{115}{15}$

- Prop. 4.2. B, ergo B, sunt æquales aggregato ex omnibus dispositis in A, vsque ad K, præter vnitatem, & K, denominato per planoplanum sub K, I, 3, & vnitatem: & quia terni A, dominant singulas B; multitudo dispositorum in A, vsque ad K, binario maior est multitudine B, videlicet numero C; ergo numerus C, est multitudo omnium A, vsq; ad K, præter duos extremos vnitatem, & K; &
- Prop. 2.2. aggregatum eorumdem, præter extremos, est dimidium plani sub C, & aggregato extremarum vnitatis, & K; & quoniam inter vnitatem, & K, tot sunt intermedij, quot vnitates in C; ergo excessus extremorum vnitatis, & K, ad 2. excessum consequentium est vt C, auctus vnitatem ad vnitatem; & componendo, excessus vnitatis, & K, auctus binario, vel aggregatum ex K, & vnitatem ad 2. est vt C, auctus 2, videlicet D, ad vnitatem; permutandoq; & conuertendo, D, dimidius est aggregati ex K, & vnitatem; & planum CD, vel numerus E, dimidius est
- Prop. 2.2. plani sub C, & aggregato ex K, & vnitatem; ergo E, est aggregatum omnium A, vsq; ad K, præter extremos vnitatem, & K: eadem ratione, quia excessus vnitatis, & K, ad 2. est vt C, auctus vnitatem ad vnitatem; diuidendo, excessus I, & vnitatis ad 2. est vt C, ad vnitatem; permutandoque, & conuertendo, C, dimidius est excessus I, & vnitatis; & duplus C, auctus vnitatem est I; & auctus ternario est K; & compositus ex 3. & quadruplo quadrati C, & octuplo eiusdem C, videlicet compositus ex 3. & quadruplo E, est planus I K, & (multiplicando per 3. planum vnitatis & 3.) compositus ex 9, & duodecuplo E, videlicet numerus G, est planoplanum sub
- Prop. 5.2. K, I, 3, & vnitatem: ergo B, sunt æquales E, denominato per G, videlicet fractioni H. Quod, &c.

Theor.

Theor. 13. Prop. 14.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab unitate, quotlibet assumptæ à prima sunt minores duodecima parte unitatis.

C. $\frac{1}{12}$. D. 4. B. 6. A. 24. E. 288. F. 297.

Sint C, quotlibet unitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate sumptæ in multitudine numeri D, à prima. Dico C, aggregatas minores esse $\frac{1}{12}$. Fiat B, binario maior D; & planum BD, sit A; cuius duodecuplus E; qui auctus numero 9. sit F. Ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam ad E; & est A, ad E, vt unitas ad 12. ergo A, ad F, minorem habet proportionem, quam unitas ad 12. & A, denominatus per F, est minor $\frac{1}{12}$. Sunt autem C, aggregatæ æquales A, denomi- Pr. 13. 2.
nato per F; ergo C, aggregatæ sūt minores $\frac{1}{12}$. Quod, &c.

Corollarium Primum.

*Vnde constat unitates denominatas solidis Pr. 15. 1.
omnium imparium ab unitate in infinitum dispositas, & aggregatas esse finitæ extensionis.*

Co-

Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quòd unitates denominatæ solidis omnium numerorum ab unitate sunt in aliqua multitudine à prima, quæ implent propositam extensionem minorem extensione dispositarum earundem in infinitum.*

Theor. 14. Prop. 15.

Unitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate, dispositæ in infinitum, & aggregatæ sunt æquales $\frac{1}{2}$.

A —————
B — C — D — E — F — G — H — I —

SInt in A, dispositæ in infinitum, & aggregatæ unitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate. Dico A, æqualem esse $\frac{1}{2}$. Alias erit A, maior, uel minor $\frac{1}{2}$. Sit maior igitur in aliqua multitudine sumptæ à prima unitates in A, dispositæ implent $\frac{1}{2}$: sit huiusmodi multitudinis numerus B, qui unitate adiecta fiat C; Def. 10. ergo aliquot unitates in A, dispositæ sumptæ à prima in Pr. 14. 2. multitudine numeri C, sunt maiores $\frac{1}{2}$: quod est absurdum:

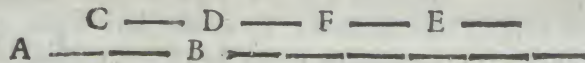
Cor. 2.
Pr. 14. 2.

dum: non est igitur A, maior $\frac{1}{12}$. Sit minor, & data pro- Pr. 25.1.
 portione minoris inæqualitatis A, ad $\frac{1}{12}$, inueniatur al-
 tera maior, quæ sit numeri I, quem numerus 12. metiatur
 per D, ad E, vnitatem maiorem; & ipsius D, sit non plus
 F; & inueniatur numerus G, qui metiatur numerum non Prop. 7.2.
 minorem F, per se ipsum auctum binario, & sumantur
 vnitates in A, dispositæ à prima in multitudine numeri
 G; & assumptarum summa sit H: constat H, esse portio-
 nem ipsius A; & æqualem producto ex numero G, in se Pr. 13.2.
 ipsum binario auctum denominato per duodecuplum,
 eiusdem producti addito 9: quia autem productus ex G,
 in se ipsum binario auctum non est minor F; etiam deno- Pr. 44.1.
 minatus per duodecuplum eiusdem producti addito 9. nō
 est minor F, denominato per duodecuplum F, addito 9;
 & (diuidendo vtrumq; numerum fractionis per 9.) non
 est minor D, denominato per duodecuplum D, auctum
 vnitatem; est autem I, duodecuplus D; & I, auctus vni-
 tate est E; ergo H, non est minor D, denominato per E:
 sed quia D, ad I, est vt unitas ad 12. uel $\frac{1}{12}$ ad unitatem;
 & I, ad E, maiorem proportionem habet, quam A, ad
 $\frac{1}{12}$; ergo ex æquo in perturbata D, ad E, uel D, deno-
 minatus per E, ad unitatem habet maiorem proportionem,
 quam A maior igitur est D, denominatus per E, quam A;
 & non est H, minor D, denominato per E; ergo H, est
 maior A, pars toto; quod est absurdum: Non igitur A, mi-
 nor est $\frac{1}{12}$, neque maior; ergo A, est æqualis $\frac{1}{12}$. Quod, & c.

Theor. 15. Prop. 16.

*Vnitates denominata solidis omnium impa-
 rium ab vnitatem, quotlibet assumpta à pri-
 ma*

ma ad succedentes in infinitum sunt, ut quadruplum plani sub numero multitudinis assumptarum, & numero binario maiore ad ternarium.



Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab unitate sint quotlibet assumptæ A, in multitudine numeri C, & succedentes in infinitum B, Planus etiam sub C, & numero binario maiore sit D, cuius quadruplus F, & duodecuplus E. Dico A, ad B, esse ut F, ad 3. Et quia C, est multitudo magnitudinum A; & D, est planus sub C, & numero binario maiore; & E, duodecuplus D; ergo A, sunt æquales D, denominato per E, auctum nouenario; & aggregatæ A, B, sunt æquales unitati denominatæ per 12. Ergo A, ad aggregatas A, B, sunt ut D, denominatus per E, auctum 9. ad $\frac{1}{12}$. & (multiplicando per 12.) ut E, denominatus per se ipsum auctum 9. ad unitatem, videlicet ut E, ad E, auctum 9. & diuidendo per 3, ut F, ad F, auctum 3; ergo diuidendo, A, ad B, sunt ut F, ad 3. Quod, &c.

Pr. 18. 2.
pr. 18. 2.

Theor. 16. Propos. 17.

Vnitatum, quæ denominantur solidis imparium ab unitate, quotlibet assumptæ ad ultimam sunt, ut productum ex quadruplo qua.

quadrati multitudinis assumptarum unitate minuto in idem quadratum auctum duplo lateris, ad sexcuplum eiusdem lateris auctum ternario.

A. $\frac{1}{11}$ C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
H. 297. K. 81. F. 189.
B. $\frac{1}{22}$

Sint in multitudine numeri E, assumptæ A, unitates denominatæ solidis omnium imparium ab unitate; quarum ultima B; & sit G, quadratum ipsius E, auctum duplo lateris eiusdem; & M, quadruplum eiusdem quadrati unitate minutum; & L, sexcuplum eiusdem E, auctum 3. Dico A, ad B, esse ut planum G M, ad L. Sit H, duodecuplum G, auctum nouenario: constat A, Pr. 13. 2. æquales esse G, denominato per H: fiat C, unitate minor E; & quadratum C, auctum duplo eiusdem sit D; cuius duodecuplus auctus 9. sit F; quia C, est unitate minor E, numero multitudinis A; constat C, esse multitudinem A, præter B; & A, præter B, æquales, esse Pr. 13. 2. D, denominato per F: tandem fiat K, nonuplus excessus G, D; constat etiam B, æqualem esse K, denominato per Pr. 44. r. planum F H: & quoniam C, est æqualis E, unitate minuto; quadratum C, est æquale unitati, & quadrato E, dempro duplo E; & (adictæ communi duplo C, uel duplo E, binario minuto) quadratum C, una cum duplo C, uidelicet numerus D, æqualis est quadrato E, unitate minuto; est autem G æqualis eidem quadrato aucto duplo E; igitur excessus G, D, est duplus E, auctus unitate; cuius triplus est sexcuplus E, auctus 3; huiusmodi est numerus L; ergo L, est triplus excessus G, D; & excessus G, D, est nona pars numeri K; ergo ex æquo L, ad
L K,

A. $\frac{1}{15}$ C. 3. E. 4. G. 24. M. 15. L. 27. D. 15.
 B. $\frac{1}{15}$ H. 297. K. 81. F. 189.

K, est vt 3. ad 9. & conuertendo K, triplus est ad L: quia diximus D, æqualem esse quadrato E, vnitæ minuto; duodecuplus ipsius D, est æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 12; & (adiecto communi 9.) duodecuplus D, auctus 9. videlicet numerus F, est æqualis duodecuplo quadrati E, minuto 3; cuius tertia pars est quadruplus quadrati E, minutus vnitæ; huiusmodi est numerus M; ergo M, tertia pars est ipsius F; & conuertendo F, triplus est ad M; videlicet, vt K, ad L; permutandoq; & conuertendo K, ad F, est vt L, ad M; ergo K, denominatus per F, æqualis est L, denominato per M: quia etiam diximus A, æquales esse G, denominato per H; & B, æqualem K, denominato per planum FH; ergo A, ad B, sunt vt G, denominatus per H, ad K, denominatum per FH; & multiplicando per H, vt G, ad K, denominatum per F; videlicet vt G, ad L, denominatum per M; ergo (multiplicando per M,) A, ad B, sunt ut planum GM, ad L. Quod, &c.

Theor. 17. Prop. 18.

Vnitatū, quæ denominatur solidis imparium ab vnitæ, qualibet assumpta ad succedentes in infinitum est, vt octuplus numeri ordinis assumpta auctus 4. ad quadruplum quadrati eiusdem vnitæ minutum.

Vni-

A $\frac{5}{8}$ B $\frac{1}{3}$ C — — — —
G 15 E. 3 D. 35. F. 7

Vnitatum, quæ denominantur solidis imparium ab unitate sit assumpta B; cuius ordinis numerus E; & ipsi B, succedentes in infinitum C; sit etiam D, quadruplus quadrati E, unitate minutus; & F, duplus E, auctus unitate. Dico B, ad C, esse ut quadruplus F, ad D. Aggregentur in A, tum B, tum quæ ipsam B, præcedunt à prima: quia E, est numerus ordinis B; est etiā multitudinis collectarum in A: fiat G, æqualis quadrato E, aucto duplo lateris eiusdem; quoniam igitur B, ad A, sunt ut sexcuplum E, auctum 3; videlicet ut triplus F, ad planum G D; sunt autem A, ad C, ut quadruplum G, ad 3; & diuidendo per 4. ut G, ad $\frac{3}{4}$; & multiplicando per D, ut planum G D, ad triplum D, denominatum per 4; ergo ex æquo B, ad C, sunt ut triplus F, ad triplum D, denominatum per 4; & diuidendo per 3, ut F, ad D, denominatum per 4; & multiplicando per 4, B, ad C, sunt ut quadruplus F, ad D. Quod, &c.

Pr. 17. 2.

Pr. 16. 2.

Theor. 18. Prop. 19.

Vnitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab unitate, quotlibet assumpta non à prima, ad succedentes in infinitum sunt, ut planus numeri assumptarum, & numeri binario maioris auctus duplo plani sub numeris assumptarum, & præcedentium, ad planum sub numero præcedentium,

L 2

tium,

tium, & numero binario maiore auctum
semper fractione in qua 3. denominatur
per 4.

$$\begin{array}{ccccccc} & A. 3. & & B. 2. & & L. 8. & M. 12. \\ D. \frac{1}{15} & \frac{1}{60} & \frac{1}{15} & E. \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & C. \frac{1}{180} & \frac{1}{120} \\ & F. 15. & & K. 20. & H. 35. & G. 189. & I. 429. \end{array}$$

VNitatum, quæ denominantur solidis omnium imparium ab unitate sint assumptæ E, non à prima in multitudine numeri B; quas in infinitum succedentes C; & præcedentes D, in multitudine numeri A; sit autem L, planus numeri B, & numeri binario maioris; & M, duplus plani sub numeris A, B; & F, planus numeri A, & numeri binario maioris. Dico E, ad C, esse ut aggregatum L, M, ad F, auctum ½ unitatis. Fiat G, nouenario maior duodecuplo ipsius F; & H, productus ex aggregato A, B, in numerum binario maiorem; & I, nouenario maior duodecuplo ipsius H: constat D, æquales esse F, denominato per G; & D, E, simul æquales H, denominato per I; & E, æquales nonuplo excessus H, F, denominato per planum G I; sit K, excessus H, I; ergo E, ad aggregatas A, E, sunt ut nonuplus K, denominatus plano G, ad H, denominatum per I; & multiplicando per I, ut nonuplus K, denominatus per G, ad H; & multiplicando per 4. ut quater nonuplus, vel ter duodecuplus K, denominatus per G, ad quadruplum H; sunt autem aggregatæ A, E, ad C, ut quadruplus H, ad 3; ergo ex æquali E, ad C, sunt ut ter duodecuplus K, denominatus per G, ad 3; & diuidendo per 3, ut duodecuplus K, denominatus per G, ad unitatem; & multiplicando per G, ut duodecuplus K, ad G, vel ad duodecuplum F, auctum 9; &

9; & diuidendo per 12. vt K, ad F, auctum $\frac{2}{12}$, vel $\frac{1}{6}$: & quoniam sunt quatuor magnitudines A, aggregatum ex A, B, & numeri binario maiores ipsis, eodem excessu B, se se excedentes; ergo planum sub maioribus, videlicet Prop. 1.2. H, excedit planum sub minoribus, videlicet E, plano sub B, & aggregato ex maxima, & minima, videlicet ex binario, B, & duplo A; planum autem sub B, & composito ex binario, & B, est L; & planum sub B, & duplo A, est M; ergo excessus H, F, videlicet K, est æqualis aggregato L, M; ergo E, ad C, sunt vt aggregatum L, M, ad F, auctum $\frac{1}{6}$. Quod, &c.

Theor. 19. Prop. 20.

Vnitatum, quæ denominantur solidis numerorum Arithmetice dispositorum ab unitate, quotlibet assumptæ à prima, sunt æquales fractioni, cuius numerator est multiplex plani sub multitudine assumptarum, & excessu aucti excessu, & binario, per eandem multitudinem; denominator verò multiplex numeratoris per duplum compositi ex quadrato, & numero excessus, auctus duplo quadrato compositi ex eodem excessu, & unitate.

Sint

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{5}$ E $\frac{1}{6}$ F $\frac{1}{7}$ G $\frac{1}{8}$
 B. 3. C. 7. D. 21. E. 24. F. 25. G. 26.
 L. 4. N. 22. I. 24. H. 182. K. 4368.

Sint A, unitates denominatæ solidis numerorum Arithmetice dispositorum ab unitate cum excessu B, sumptæ in multitudine numeri C; sit autem D, planum CB; & D, auctus B, sit E; quo singulis duabus unitatibus aucto fiant F, & G: constat G, esse æqualem plano CB, aucto B, & binario: & quia C, est multitudo A; & terni Arithmetice dispositi denominant singulas A; ergo numerus binario maior C, est multitudo eorum, qui adhibetur in denominatione sumptarum A; & propterea C, multitudo est intermediorum, præter extremos; sed quot sunt intermedij, totuplex est excessus penultimi, & unitatis ad excessum consequentium; ergo planum B C, videlicet numerus D, est excessus penultimi, & unitatis; & D, auctus B, videlicet E, est excessus ultimi, & unitatis; & E, auctus unitate videlicet F, est ultimus; & G aggregatum extremorum F, & unitatis: ex ductu G, in C, fiat H; constat etiam H, esse duplum aggregati intermediorum. Sit I, duplum compositi ex quadrato, & numero B; & ex ductu H, in I, fiat K; & compositum ex B, & unitate sit L; constat L, esse secundum Arithmetice dispositorum ab unitate. Dico A, æquales esse H, denominato per compositum ex K, & duplo quadrati L. Fiat N, compositus ex D, & unitate; constat N, esse penultimum Arithmetice dispositorum ab unitate; ergo dispositionis Arithmetice primi sunt unitas, & L; ultimi uero N, & F; & extremi unitas, & F: quoniam unitas ad duplum B; vel H, ad duplum plani B H; vel dimidium H, ad planum B H, est ut aggregatum intermediorum ad excessum plani N F, super L, planum unitatis, & L; est autem aggregatum

Pr. 2. 2.

pr. 3. 2.

gatum intermediorum dimidium H; ergo excessus plani NL, super L, est planum BH; & planum NF, est æquale plano BH, & L; & solidum LNF, est æquale solido LBH, aucto quadrato L; quoniam autem L, est æqualis B, & unitati; planum LB, est æquale composito ex quadrato B, & numero B; videlicet dimidio I; ergo solidum LBH, est æquale dimidio plani HI; videlicet dimidio K; ergo solidum LNF, uel planoplanum unitatis, L, N, & F, est dimidium K, auctum quadrato L; ergo A sunt Pr.4.2. æquales dimidio H, denominato per dimidium K, auctum quadrato L; & multiplicando utrumque numerum fractionis per 2. sunt æquales H, denominato per K, auctum duplo quadrato L. Quod, &c.

Theor. 20. Prop. 21.

*Unitatum, quæ denominantur solidis omnium
Arithmetice dispositorum ab unitate, quot-
libet assumptæ à prima sunt minores unita-
te denominata duplo compositi ex quadra-
to, & numero excessus.*

C — — — — —
D — — E — — F — — G — —

Sint C, quotlibet unirates denominatæ solidis omniū Arithmetice dispositorum ab unitate, sumptæ in qualibet multitudine à prima; & sit D, duplum compositi ex quadrato, & numero excessus dispositionis Arithmetice. Dico C, minores esse unitate denominata D. Sit E,

Pr. 20. 2. E, multiplex plani multitudinis assumptarum, aucti numero excessus, & binario, per eandem multitudinem; & F, multiplex E, per D; & G, duplum quadrati compositi ex eodem excessu, & unitate; ergo C, sunt æquales E, denominato per F, auctum G; & C, ad unitatem sunt ut E, denominatus per F, auctum G, ad unitatem; uidelicet ut E, ad compositum ex F, & G; habet autem E, ad compositum ex F, & G, minorem proportionem quam E, ad F; & E, ad F, est ut unitas ad D; uel ut unitas denominata per D, ad unitatem; ergo C, ad unitatem habent minorem proportionem, quam unitas denominata per D, ad eandem unitatem; ergo C, sunt minores unitate denominata per D. Quod, &c.

Corollarium Primum.

Pr. 15. 1. *Vnde constat unitates denominatas solidis omnium numerorum Arithmetice dispositorum ab unitate in infinitum dispositas, Et aggregatas esse finitæ extensionis.*

Corollarium Secundum.

Pr. 16. 1. *Patet etiam, quod unitates denominata solidis omnium numerorum ab unitate sunt in aliqua multitudine à prima, que implent propositam extensionem minorem extensione dispositarum earundem in infinitum.*
Probl.

druplo plani B C; & (dempto prius communi quadrato D, nec non diuidendo per quadruplum C,) aggregatum solidi sub C, & quadrato A, & plani A D, non est minus B: sed A, metitur aggregatum solidi sub C, & quadrato A, & plani A D, per planum AC, auctum D; ergo A, metitur numerum non minorem B, per planum AC, auctum D. Quod, &c.

Theor. 21. Prop. 23.

Vnitates denominata solidis omnium numerorum Arithmetica dispositionis ab unitate, disposita in infinitum, & aggregatae sunt aequales unitati denominatae per duplum compositi ex quadrato, & numero excessus consequentium eiusdem dispositionis.

A ————— L. 24. M. $\frac{1}{2}$
 B — C — I — D — E — F — N. 16. O. 3. P. 5. G —
 H —————

Sint in A, dispositae in infinitum, & aggregatae unitates denominatae solidis omnium numerorum Arithmeticae dispositionis ab unitate; & sit L, duplus compositi ex quadrato, & numero excessus consequentium eiusdem Arithmeticae dispositionis; & M, sit unitas denominata per L. Dico, quod A, est aequalis M. Alias
 Coroll. 2. erit A, maior, vel minor M. Sit maior; igitur in aliqua
 pr. 21. 2. multitudine sumptae a prima unitates in A, dispositae implent M: sit huiusmodi multitudinis numerus B, qui
 unitate

vnitate adiecta fiat C; ergo aliquot vnitates in A, dispo- Def. 10.
sitæ sumptæ à prima in multitudine numeri C, sunt maio-
res M; quod est absurdum: non est igitur A, maior M. Pr. 21. 2.
Sit minor; & data proportionem minoris inæqualitatis A, Pr. 25. 1.
ad M, inueniatur altera maior, quæ sit numeri I, quem
L, metiatur per D, ad E, numerum vnitate maiorem; &
& ipsius D, fiat multiplex F, per N, quadratum compo-
siti ex excessu consequentium, & vnitate; & datis tribus Pr. 22. 2.
numeris F, excessu dispositionis O, & P, aggregato ex
O, & binario, quartus inueniatur G, qui metiatur nu-
merum non minorem F, per planum GO, auctum P; &
sumantur vnitates in A, dispositæ à prima in multitudine
numeri G; & assumptarum summa sit H: constat H,
esse portionem ipsius A; & æqualem producto ex nume- Pr. 20. 2.
ro G, in planum GO, auctum P, denominato per mul-
tiplex eiusdem producti secundum L, auctum N: quia
autem productus ex G, in planum GO, auctum P, non
est minor F; etiam denominatus per sui ipsius multiplicem Pr. 44. 1.
secundum L, auctum N, non est minor F, denominato
per multiplicem F, secundum L, auctum N; & (diuiden-
do vtrumq; numerum fractionis per N,) non est minor
D, denominato per multiplicem D, secundum L, auctum
vnitate; est autem I, multiplex D, secundum L; & I,
auctus vnitate est E; ergo H, non est minor D, denomi-
nato per E: sed, quia D, ad I, est vt vnitas ad L; vel vt
M, (vnitas denominata per L,) ad vnitatem; & I, ad
E, maiorem proportionem habet, quam A, ad M; ergo
ex æquo in perturbata D, ad E, vel D, denominatus
per E, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quam
A; maior igitur est D, denominatus per E, quam A; &
non est H, minor D, denominato per E; ergo H, est
maior A, parstoto, quod est absurdum: non igitur A,
minor est M, neque maior: ergo A, est æqualis M.
Quod, &c.

M 2

Theor.

Theor. 22. Propos. 24.

Vnitates denominatæ solidis numerorū Arithmetice dispositorum ab vnitāte, quotlibet assumptæ à prima ad succedentes in infinitum sunt, ut productus ex plano excessus consequentium Arithmetice dispositorum, & multitudinis assumptarum ducto in se ipsum auctum eodem excessu, & binario, ad compositum ex eodem excessu, & vnitāte.

A. 2. B. 3. D. 6. C. 11. L. 22. E. 66. F. 4. I. 12. G. 264. H. 16.
R. $\frac{1}{25}$ $\frac{1}{125}$ S —————

Sint R, quotlibet vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmetice dispositorum ab vnitāte, cum excessu B, sumptæ à prima in multitudine numeri A; succedentes verò in infinitum sint dispositæ, & aggregatæ in S; & planum AB, sit D; & D, auctus B, & binario sit C; & ex ductu C, in A, fiat L; & ex L, in B, fiat E: constat E, esse productum ex D, in C: sit F, compositus ex B, & vnitāte. Dico R, ad S, esse, ut E, ad F. Ducatur F, in B, ut fiat I: constat I, esse compositum ex quadrato, & numero B: ducatur etiam F, in E, ut fiat G: quoniam E, est productus LB; ergo G, est productus LBF; est autem I, productus BF; ergo G, est productus LI:

L I: fiat ipſius F, quadratum H: conſtat R, eſſe æquales Pr. 20. 2.
 L, denominato per duplum G, auctum duplo H; & ag- Pr. 23. 2.
 gregatas R, S, æquales eſſe vnitati denominatæ per du-
 plum I; Ergo R, ad aggregatas R, S, ita ſe habent vt L,
 denominatus per duplum G, auctum duplo H, ad vnita-
 tem denominatam duplo I; & multiplicando per 2. vt L,
 denominatus per G, auctum H, ad vnitatem denomina-
 tam per I; & multiplicando per I, vt productum L I, vi-
 delicet G, denominatus per G, auctum H, ad vnitatem;
 & (multiplicando per G, auctum H,) ita ſe habent R, ad
 aggregatas R, S, vt G, ad compositum ex G, H; & di-
 uidendo, R, ad S, ita ſe habent vt G, ad H; uidelicet
 ut planum F E, ad quadratum F; & (diuidendo per F,) ſunt R, ad S, ut E, ad F. Quod, &c.

Theor. 23. Prop. 25.

*Productus duorum laterum eſt maior, quàm
 vt ad eorundem differentiam ſit, vt minus
 latus ad vnitatem; & exceſſus eſt minoris
 lateris quadratus.*

A. 5.

C. 3.

B. 2.

S Int duæ magnitudines A, B; quarum ſit B, minor;
 & differentia C. Dico quod productus AB, miſu-
 tus quadrato B, ad C, eſt vt B, ad vnitatem. Quoniã
 A, æqualis eſt aggregato C, B; productus AB, eſt æqua-
 lis aggregato producti CB, & quadrati B; ergo produ-
 ctus

ctus AB, minutus quadrato B, est æqualis producto CB; est autem productus CB, ad C, vt B, ad vnitatem; ergo productus AB, minutus quadrato B, ad C, est vt B, ad vnitatem. Quod, &c.

Theor. 24. Prop. 26.

Vnitates denominatæ solidis numerorum Arithmetice dispositorum, quotlibet assumptæ sunt minores vnitæte denominatæ solido sub duplo excessu, & minimis numeris.

B. 2. C. 5. 8. E. 11. F. 14. D. 6.
 $A \frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

Sint in A, dispositæ quotlibet vnitates denominatæ solidis Arithmetice dispositorum; quorum primus B; secundus C; & duplus excessus consequentium D. Dico A, minores esse vnitæte denominatæ solido BCD. Arithmetice dispositorum, qui adhibentur in denominatione vnitatum A, sint penultimus E, & vltimus F: ergo A, sunt æquales aggregato ex intermedijs, præter B, F, denominato per planoplanum BCEF; ergo A, ad vnitatem sunt, vt aggregatum ex intermedijs præter B, F, ad planoplanum BCEF; videlicet proportionem habent compositâ ex proportionibus intermediorum præter B, F, ad excessum planorum EF, BC, & huius excessus
 Pr. 4. 2. ad planoplanum BCEF: est autem proportio intermediorum præter B, F, ad excessum planorum EF, BC, eadem
 Prop. 3. 2.

eadem proportioni unitatis ad D; & proportio excessus Pr. 15. 2.
 planorum EF, BC, ad planoplanum BCEF, minor pro-
 portione unitatis ad planum BC; vel multiplicando per
 D, minor proportione D, ad solidum DBC; ergo ex
 æquo proportio intermediorum præter AF, ad planopla-
 num BCEF, minor est proportione unitatis ad solidum
 DBC; & aggregatum intermediorum præter B, F, deno-
 minatum planopiano BCEF, videlicet A, minor est uni-
 tate denominata solido DBC. Quod, &c.

Corollarium Primum.

*Vnde constat unitates denominatas solidis Pr. 15. 2.
 numerorum Arithmetice dispositorum in
 infinitum dispositas, & aggregatas esse
 finita extensionis.*

Corollarium Secundum.

*Patet etiam, quod unitates denominata soli- Pr. 16. 1.
 dis numerorum Arithmetice dispositorum
 in aliqua multitudine sunt à prima, qua
 implent propositam extensionem minorem
 extensione dispositarum earum in infinitum.*

Theor.

Theor. 25. Prop. 27.

*Vnitates denominata solidis numerorum
Arithmetice dispositorum in infinitum di-
sposta, & aggregata sunt aequales unitati
denominata solido sub duplo excessu, &
minimis numeris.*

A. 2. B. 5.

D

H

K

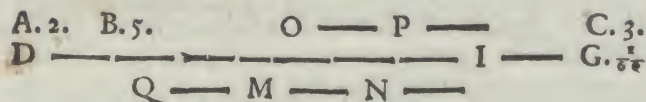
C. 3.

G. $\frac{1}{6}$

Sint numerorum Arithmetice dispositorum minimi
numeri A, B; quorum excessus C; & vnitates deno-
minatae solidis eorundem in infinitum dispositae, & ag-
gregatae sint in D; & vnitas denominata solido sub du-
plo C, & plano AB, sit G. Dico D, esse aequalem G.

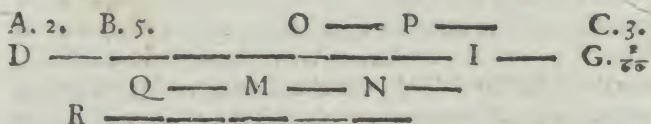
Coroll. 1. Alias erit D, maior, vel minor G: sit maior; igitur in ali-
quā multitudine sumptae D, à prima implent G: sit
huiusmodi multitudinis numerus H, qui vnitate adiecta
Def. 10. fiat K; ergo aliquot dispositae à prima magnitudines D,
Pr. 26. 2. sumptae in multitudine numeri K, sunt maiores G; quod
est absurdum: non est igitur D, maior G.

Sit D, minor G; & sit defectus I; & vt I, ad G, ita fiat
plani AB, quadratus ad Q; & ex diuisione Q, per planū
Pr. 7. 2. AB, fiat M; & inueniatur numerus N, qui multiplican-
do seipsum auctum numero C, producat numerum non
minorem



minorem M; & inter Arithmetice dispositos inueniantur
 duo numeri consequentes O, P, maiores numero N; ergo
 etiam planum O P, maius est plano numeri N, ducti in
 seipsum auctum numero C; & multò maius est, quam M;
 & (multiplicando per planum A B,) planoplanum A B O P,
 maius est solido A B M, videlicet numero Q; est autem
 numerus Q, ad quadratum plani A B, vt G, ad I; ergo
 planoplanum A B O P, ad quadratum plani A B, maiorem
 habet proportionem, quam G, ad I; & per conuersionem
 rationis, planoplanum A B O P, ad excessum eiusdem su-
 prà quadratum plani A B, minorem habet proportionem,
 quàm G, ad D; habet autem excessus planoplani A B O P, supra quadratum plani A B, ad excessum planorum
 O P, A B, proportionem eandem, quàm planum A B, Pr. 25. 2.
 ad vnitatem; vel eandem, quàm vnitas ad vnitatem
 denominatam plano A B; vel (diuidendo per duplum
 C,) eandem, quàm vnitas denominata duplo C, ad
 vnitatem denominatam solido sub duplo C, & A B, vi-
 delicet ad G; ergo ex æquali in perturbata planoplanum
 A B O P, ad excessum planorum O P, A B, minorem ha-
 bet proportionem, quàm vnitas denominata duplo C,
 ad D; & conuertendo excessus planorum O P A B, ad
 planoplanum A B O P, maiorem habet proportionem,
 quàm D, ad vnitatem denominatam duplo C; est autem
 aggregatum intermediorum numerorum Arithmetice
 dispositorum inter A, P, ad excessum planorum O P, Pr. 3. 2.
 A B, vt vnitas ad duplum C; vel vt vnitas denomina-
 N ta

ta duplo C, ad vnitatem; ergo ex æquali in perturbata aggregatum intermediorum inter A, P, ad planoplanum ABOP, maiorem habet proportionem, quàm D, ad vnitatem; & aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planopiano ABOP, ad vnitatem habet maiorem proportionem, quàm D, ad eandem vnitatem; Ergo aggregatum intermediorum inter A, P, denominatum planopiano ABOP, maius est quàm D:



quot autem sunt inter A, P, intermedij, totidem assumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum dispositæ, & aggregatæ sunt in D; quarum assumptarum aggregatum sit R: constat R, esse partem, vel portionem ipsius D; & constat etiam R, esse æqualem aggregato intermediorum A, P, denominato per planoplanum ABOP; ergo R, est maius D, pars toto, quod est absurdum: non ergo D, est minor G, neque maior; ergo D, est æqualis ipsi G. Quod, &c.



Theor.

Theor. 26. Prop. 28.

*Vnitates denominatae solidis numerorum
Arithmetice dispositorum, quotlibet as-
sumpta ad succedentes in infinitum sunt,
ut excessus plani, qui fit à maximis nu-
meris adhibitis in denominatione assump-
tarum supra planum, qui fit à minimis,
ad idem planum à minimis contentum.*

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.
F. $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{64}$ G. —————

Numerorum Arithmetice dispositorum sint A, B, minimi cum excessu E; & sint F, quotlibet assumptæ, & aggregatæ vnitates denominatæ solidis numerorum dispositorum Arithmetice ab A, B; & in ipsarum F, denominatione sint adhibiti numeri C, D, maximi; & ipsis F, succedentes in infinitum dispositæ, & aggregatæ sint G. Dico F, ad G, esse ut excessus planorum CD, AB, ad planum AB. Quoniam F, sunt Pr. 4. 2. æquales aggregato intermediarum Arithmetice dispositorum inter A, D, denominato per planoplanum AB CD; & G, sunt æquales vnitati denominatæ solido sub Pr. 27. 2. duplo E, & plano CD; igitur F, ad G, sunt ut aggregatum intermediarum inter A, D, denominatum pla-
N 2 noplano

A. 2. B. 5. 8. C. 11. D. 14. E. 3.
 F. $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ G. —————

Pr. 3.2. noplano ABCD, ad vnitatem denominatam solido
 sub duplo E, & plano CD; & multiplicando per pla-
 num CD, sunt vt aggregatum intermediorum A, D,
 denominatum plano AB, ad vnitatem denominatam
 duplo E; & multiplicando per duplum E, vt excessus
 planorum CD, AB, (est enim excessus huiusmodi
 multiplex aggregati intermediorum inter A, D,
 vt duplum E, vnitatis) denominatus plano
 AB, ad vnitatem; & multiplicando
 etiam per planum AB, sunt F,
 ad G, vt excessus planorum
 CD, AB, ad planum
 AB. Quod,
 &c.

Finis Libri Secundi.



NOVAE

N O V Æ
 QVADRATVRÆ
 ARITHMETICÆ,
 S E V

De Additione Fractionum

LIBER TERTIVS,

In quo eorum, quæ superioribus Libris
 demonstrata sunt, generaliora
 traduntur principia.

Theorema 1. Propositio 1.

*Dispositis quomodolibet magnitudinibus, ut
 assumptis totidem semper secundum ali-
 quem numerum, singula excedant singulas
 precedentes pariter totidem sumptas ordi-
 nis eiusdem; ex denominatione huiusmodi
 excessuum magnitudinum ordinis eiusdem
 per productum tum ex magnitudinibus,
 quarum sunt excessus, tum etiam ex inter-
 medijs*

medijs, sunt fractiones, quarum aggregatum est excessus productorum totidem laterum ab extremis hinc inde, denominatus per productum dupli numeri laterum ab ijsdem extremis.

A—B—C—D—E—F—G—H—
 I—K—L—M—N— P—
 Q—R—S—T—X—Y—

D Ispostis quomodolibet magnitudinibus A, B, C, D, E, F, G, ut assumptis totidem semper secundum aliquem numerum, utpote singulæ D, E, F, superent singulas totidem sumptas præcedentes A, B, C, & similiter E, F, G, superent B, C, D, & sic deinceps; ex denominatione excessus D, A, per productum earundem excedentium D, A, & intermediarum B, C, fiat fractio I; & similiter ex denominatione excessuum E, B; F, C; G, D; H, E, per productos B C D E, C D E F, D E F G, E F G H, fiant fractiones K, L, M, N; & quot sunt A, B, C, vel D, E, F, &c. totidem sint extremæ maximæ F, G, H, & minimæ A, B, C; & ex denominatione excessus producti extremarum hinc inde F G H, A B C, per productum omnium earundem extremarum A B C F G H, fiat fractio P. Dico I, K, L, M, N, aggregatas æquales esse P. Ex totidem semper consequentibus A B C, B C D, &c. fiant producti Q, R, S, T, X, Y: quoniam Q, est productum A B C; & R, productum B C D; planum Q R, est productum ex productis A B C, B C D; ergo A, D, & productus A B C D, sunt homologi rationis eiusdem laterum Q, R, & eorundem laterum plani Q R,

QR; ergo excessus D, A, ad productum ABCD, est vt excessus R, Q, ad planum QR; ergo excessus D, A, denominatus producto ABCD, videlicet fractio I, est æqualis excessui R, Q, denominato plano QR: similiter demonstrabimus K, L, M, N, æquales excessibus S, R; T, S; X, T; Y, X, denominatis planis RS, ST, TX, XY; ergo colligendo I, K, L, M, N, sunt æquales excessibus consequentium Q, R, S, T, X, Y, denominatis eorumdem consequentiū planis; videlicet vni excessui extremorum Y, Q, denominato eorumdem extremorum plano QY: est autem Y, productum FGH; & Q, productum ABC; ergo excessus Y, Q, denominatus plano QY, est æqualis excessui productorum FGH, ABC, denominato producto ABCFGH, videlicet fractioni P: ergo I, K, L, M, N, compositæ, & aggregatæ sunt æquales P. Quod, &c.

Theor. 2. Prop. 2.

Dispositis Arithmeticè magnitudinibus, excessus producti quotlibet laterum à maximis extremis, supra productum totidem laterum à minimis extremis, ad aggregatum productorum numeri laterum unitate minoris factorum ab iisdem dispositis consequentibus, præter primam, & ultimam, habet proportionem compositam, tum excessus dispositionis, tum etiam numeri multitudinis

*tudinis laterum productorum excedentium
ad unitatem.*

A—B—C—D—E—F—G—H—

Sint Arithmeticè dispositæ quotlibet magnitudines A, B, C, D, E, F, G, H; & à maximis extremis fiat productum trium laterum FGH; & à minimis extremis productum totidem laterum ABC. Dico excessum productorum FGH, ABC, ad aggregatum productorum duorum laterum, qui sunt à consequentibus, præter primam, & ultimam A, H, videlicet ad compositum ex planis BC, CD, DE, EF, FG, habet proportionem compositam, tum excessus B, A, tum etiam ternarij numeri multitudinis laterum F, G, H, ad unitatem. Sit E, in dispositione proposita proxima minor F: quoniam excessus H, E, ad excessum B, A, est vt 3. multitudo numerorum F, G, H, ad unitatem; addita communi proportionem excessus B, A, ad unitatem, ergo excessus H, E, ad unitatem habet proportionem compositam, tum excessus B, A, tum ternarij ad unitatem: ducatur E, in proximas maiores magnitudines F, G, vt fiat EFG, productus totidem laterum, quot est FGH; ergo planum FG, ad productum EFG, est vt vnitas ad E; est autem productus EFG, ad productum FGH, vt E, ad H; & diuidendo, productus EFG, ad excessum productorum FGH, EFG, vt E, ad excessum H, E; ergo ex æquali planum FG, ad excessum productorum FGH, EFG, est vt vnitas ad excessum H, E; & conuertendo, excessus productorum FGH, EFG, ad planum FG, est vt excessus H, E, ad unitatem: similiter demonstrabimus, quod singuli excessus productorum EFG, DEF, CDE, BCD, ABC, ad singula plana EF, DE, CD, BC, AB, sunt vt excessus

excessus H, E, ad unitatem: ergo colligendo, excessus productorum FGH, ABC, ad aggregatum planorum AB, BC, CD, DE, EF, FG, est vt excessus H, E, ad unitatem; videlicet proportionem habet compositam, tum excessus B, A, tum etiam numeri multitudinis laterum F, G, H, ad unitatem. Quod, &c.

Theor. 3. Prop. 3.

Dispositis Arithmetice quotlibet magnitudinibus, unitates denominatae productis totidem semper consequentium, sunt aequales aggregato productorum numeri laterum binario minoris, factorum ab iisdem dispositis consequentibus, prater primam, & ultimam, denominato per planum sub duobus totidem hinc inde extremarum productis numeri laterum unitate minoris.

A —	B —	C —	D —	E —	F —	G —	
	H —	I —	K —	L —			M —
	N —	O —	P —	Q —			R —

Sint dispositæ Arithmetice magnitudines quocunq; A, B, C, D, E, F, G; & unitates denominatæ productis earumdem (ex.gr.) quaternarum sint H, I, K, L; & aggregatum productorum ex binis iisdem, prater primam A, & ultimam G, denominatum per planum sub
O duobus

A — B — C — D — E — F — G —
 H — I — K — L — M —
 N — O — P — Q — R —

duobus ternorum laterum hinc inde extremorum productis ABCEFG, sit M. Dico, quod H, I, K, L, sunt æquales M. Sumantur A, B, C, D, E, F, G, ternæ; & singularum, quæ ternæ sumuntur excessus supra singulas præcedentes denominentur productis earumdem, quarum sunt excessus, & intermediarum (qui producti sunt singuli quaternorum laterum) ut fiant fractiones N, O, P, Q, & excessus productorum à ternis hinc inde extremis EFG, ABC, denominatus omnium earumdem extremorum producto ABCEFG, sit R; ergo N, O, P, Q, sunt æquales R: & quia N, O, P, Q, singuli sunt excessus earum, quæ ternæ sumuntur denominati productis quaternarum (ut excessus D, A, denominatus producto ABCD,) & H, I, K, L, singulæ sunt unitates denominatæ similiter; ergo singuli N, O, P, Q, ad singulas H, I, K, L, sunt ut excessus D, A, ad unitatem; videlicet proportionem habent compositam excessus D, A, ad excessum consequentium B, A, & huius ad unitatem: est autem excessus D, A, ad excessum B, A, ut 3. ad unitatem; ergo excessus D, A, ad unitatem habet compositam proportionem tum excessus B, A, tum etiam 3. ad unitatem: quæ composita eadem est proportioni excessus productorum trium laterum ab extremis factorum EFG, ABC, ad aggregatum productorum ex binis iisdem, præter A, G; & (diuidendo per productum omnium extremarum ABCEFG,) eadem est proportioni R, ad M: ergo singulæ magnitudines N, O, P, Q, ad singulas H, I, K, L, sunt ut R, ad M; & colligendo omnes, N, O, P, Q, ad omnes H, I, K, L, sunt ut R, ad M; & permutando,

Pr. 1.3.

Pr. 2.3.

do, quia N, O, P, Q, sunt æquales R; etiam H, I, K, L, sunt æquales M. Quod, &c.

Theor. 4. Propos. 4.

Dispositis Arithmetice quotlibet magnitudinibus, unitates denominata productis totidem semper in dispositione, sunt minores, quam ut ad unitatem habeant proportionem compositam unitatis tum ad productum ex minimis numeri laterum unitate minoris, tum ad numerum laterum eiusdem producti, tum etiam ad excessum dispositionis Arithmetica.

B — C — D — — E — F — G —
A — — — — — — — — — — H —

Sint dispositæ Arithmetice quotlibet magnitudines, quarum B, C, D, minimæ; & E, F, G, maximæ, cum excessu H; & unitates denominatæ productis quatuor semper laterum sint A. Dico, quod A, sunt minores, quam ut ad unitatem habeant proportionem compositam unitatis tum ad productum BCD, tum ad 3. numerum laterum B, C, D, tum etiam ad H. Quoniam B, C, D, &c. sunt Arithmetice dispositæ, ergo A, sunt Pr. 3. 3. æquales aggregato productorum duorum semper laterum ex ipsis dispositis præter B, G, denominato per planum

O 2 cx

B — C — D — — E — F — G —
A — — — — — — — — — — H —

Pr. 23.

Pr. 25. 2.

ex productis trium laterum BCD, EFG: ergo A, ad unitatem sunt ut aggregatum productorum duorum semper laterum ex dispositis præter B, G, ad planum ex productis trium laterum BCD, EFG; videlicet proportionem habent compositam dicti aggregati productorum duorum laterum à consequentibus præter B, G, ad differentiam productorum trium laterum ab extremis EFG, BCD, & huiusmodi differentiæ ad eorundem productorum planum BCDEFG; aggregatum autem productorum duorum laterum à consequentibus ad differentiam productorum trium laterum ab extremis proportionem habet compositam unitatis tum ad 3. numerum laterum BCD, tum etiam ad H; ergo A, ad unitatem habent proportionem compositam unitatis tum ad 3. tum ad H, & differentiæ productorum EFG, BCD, ad productum BCDEFG: quoniam autem productum BCDEFG, maius est quam ut ad differentiam productorum EFG, BCD, eandem habeat proportionem, quam productus BCD, ad unitatem; conuertendo, differentia productorum EFG, BCD, ad productum BCDEFG, minorem habet proportionem, quam unitas ad productum BCD; ergo (addendo communem proportionem compositam unitatis tum ad 3. tum etiam ad H,) A, sunt minores, quam ut ad unitatem habeant proportionem compositam unitatis tum ad productum BCD, tum ad 3. numerum laterum BCD, tum etiam ad H. Quod, &c.



Corol.

Corollarium Primum.

Vnde constat, quòd unitates, qua denominantur productis totidem semper magnitudinum Arithmeticè dispositarū, quotlibet assumpta sunt minores unitate denominata solido sub producto à minimis numeri laterum unitate minoris, sub eodem laterum numero, & sub excessu dispositionis.

Corollarium Secundum.

Constat praterea, quòd unitates, qua denominantur productis totidem semper magnitudinum Arithmeticè ordinarum, in infinitum disposita, & aggregata sunt extensionis finita. Pr. 15. 1.

Corollarium Tertium.

Manifestum tandem est, quòd unitates, qua denominantur productis totidem semper magni- Pr. 16. 1.

magnitudinum Arithmetice ordinatarum, in aliqua multitudine sunt à prima, quæ propositam implent extensionem minorem extensione dispositarum earumdem in infinitum.

Theor. 5. Prop. 5.

Dispositis Arithmetice magnitudinibus, unitates denominata productis totidem semper in dispositione, ordinata in infinitum, & composita ad unitatem habent proportionem compositam unitatis tum ad productum ex minimis numeri laterum unitate minoris, tum ad numerum laterum eiusdem producti, tum etiam ad excessum dispositionis Arithmetice.

A — B — C — — — — —
 E — — — — —
 F — G — — — — —
 H — I — — — — — D — — — — —

Magnitudinum Arithmetice dispositarum in infinitum sint minimæ ABC, & excessus D; unitates autem denominatæ productis quatuor semper laterum ordi-

ordinentur, & aggregentur in E. Dico, quod E, ad unitatem habet proportionem compositam unitatis tunc ad productum ABC, tunc ad 3. numerum laterum ABC, tunc etiam ad excessum D. Alias E, maior, est vel minor, quam ut ad unitatem habeat eandem proportionem compositam: sit maior; & sit excessus F; & ab E, deducto F, relinquatur G; ergo G, ad unitatem habet predictam proportionem compositam: quoniam E, maior est G; ergo in aliqua multitudine sumptæ à prima magnitudines in E, dispositæ implent G: sit huiusmodi multitudinis numerus H; qui adiecta unitate fiat I; ergo magnitudines in E, dispositæ sumptæ in multitudine I, sunt maiores G; videlicet sunt maiores, quam ut ad unitatem habeant predictam proportionem compositam; quod est absurdum: ergo E, non est maior, quam ut ad unitatem habeat proportionem compositam unitatis tunc ad productum ABC, tunc ad 3. numerum laterum ABC, tunc etiam ad excessum D.

Coroll. 3.

prop. 4. 3.

Def. 10.

Coroll. 1.

prop. 4. 3.

A — B — C — — O — P — S —
 E ————— F —
 G —————
 Q ————— M — N — R — D —

Sit E, minor G; & sit defectus F; & ut F, ad G, ita fiat productum ABC, quadratus ad Q; & ex divisione Q, per productum ABC, fiat quotiens M; & magnitudinis M, tamquam productum totidem laterum æqualium, quot sunt ABC, latus inueniatur, utpote radix cubica, quæ sit N; & inter magnitudines Arithmetice dispositas inueniantur tres, vel quot sunt A, B, C, totidem magnitudines consequentes O, P, S, maiores predicta radice N: ergo productum O, P, S, maius est productum totidem laterum æqualium ipsi N, videlicet magnitudine

A — B — C — O — P — S —
 E — — — — — — — — — — F —
 G — — — — — — — — — — — —
 Q — — — — M — — — N — R — — D —

gnitudine M; & multiplicando per productum ABC, productum ABCOPS, maius est producto ABCM, videlicet Q; est autem Q, ad quadratum producti ABC, ut G, ad F; ergo productum ABCOPS, ad quadratum producti ABC, maiorem habet proportionem, quam G, ad F; & per conuersionem rationis, productum ABCOPS, ad excessum eiusdem supra quadratum producti ABC, minorem habet proportionem, quam G, ad E; habet autem excessus producti ABCOPS, supra quadratum producti ABC, ad excessum productorum OPS, ABC, proportionem eandem, quam productus ABC, ad vnitatem; qua communi adiecta, productus ABCOPS, ad excessum productorum OPS, ABC, minorem habet proportionem, quam composita G, ad E, & producti ABC, ad vnitatem; sed excessus productorum OPS, ABC, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium inter Arithmetice dispositas præter A, S, habet proportionem compositam tum 3. numeri laterum ABC, tum etiam excessus D, ad vnitatem; qua etiam communi adiecta, productus ABCOPS, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, habet minorem proportionem, quam composita G, ad E, & producti ABC, ad vnitatem, necnon composita tum numeri 3, tum etiam excessus D, ad vnitatem; & est composita tum producti ABC, tum numeri 3. tum etiam excessus D, ad vnitatem æqualis proportioni vnitatis ad G; quæ composita proportioni G, ad E, facit proportionem vnitatis ad E; ergo productus ABCOPS,
 ad

ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, habet minorem proportionem, quam vnitas ad E: sed productus ABCOPS, ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, est vt vnitas ad aggregatum productorum duorum laterum consequentium præter A, S, denominatum producto ABCOPS, quæ quidem fractio vocetur R; ergo vnitas ad R, habet minorem proportionem, quam ad E; & propterea R, est maior E: tandem quot sunt producti duorum laterum consequentium præter A, S, totidem assumantur à prima earum vnitatum, quæ in infinitum ordinatæ sunt, & composita in E: constat Prop. 1.3. R, esse aggregatum huiusmodi assumptarum; & propterea R, esse portionem extensionis E, maiorem, minoris; quod est absurdum: non ergo E, minor est, neque maior; ergo idem est, quod ad vnitatem habet proportionem compositam vnitatis tum ad productum ABC, tum ad 3. numerum laterum A B C, tum etiam ad excessum D. Quod, &c.

Theor. 6. Prop. 6.

In facta dispositione continua magnitudinum procedentium in infinitum, differentia denominata planis disposita, & aggregata infinita sunt aequales vnitati denominata magnitudine, quæ est principium dispositionis.

S It dispositio continua magnitudinum procedentium in infinitum ab A; & differentia denominata planis
P in

A ————— C ———
 B ————— F ———
 D — E — G — H —

in huiusmodi dispositione ordinentur in infinitum, & componantur in B. Dico quod B, sunt æquales unitati denominatæ per A. Sunt enim B, extensionis finitæ: nam assumptis quotlibet à prima, & in denominatione ultimæ assumptarum adhibita C, una ex dispositis ab A: constat assumptas æquales esse differentiæ C, A, denominatæ plano CA; & ad unitatem se habere ut differentia C, A, ad planum CA; & conuertendo, unitatem esse ad assumptas ut planum CA, ad differentiam C, A: sed maiorem habet proportionem planum CA, ad differentiam C, A, quam A, ad unitatem; vel maiorem quam unitas ad unitatem denominatam per A; ergo unitas ad assumptas maiorem habet proportionem quam ad unitatem denominatam per A; & propterea quotlibet assumptæ sunt minores unitate denominata per A: ergo B, sunt extensionis finitæ. Igitur si B, non sunt æquales unitati denominatæ per A, necessariò maiores erunt, vel minores: ponantur maiores; & quoniam B, sunt extensionis maioris unitate denominata per A; sumi possunt in aliqua multitudine à prima, ut impleant unitatem denominatam per A; sit huiusmodi multitudinis numerus D, qui adiecta unitate fiat E; ergo B, sumptæ in multitudine numeri E, sunt maiores unitate denominata per A; quod est contra ea, quæ superius demonstrata sunt: non ergo B, sunt maiores unitate denominata per A.

Supponantur minores; & sit defectus F; & ut F, ad unitatem denominatam per A, ita fiat A, ad G; & inter numeros dispositos ab A, inueniatur C, numerus maior G; ergo C, ad A, maiorem habet proportionem quam G, ad

G, ad A; uel quàm unitas denominata per A, ad F; & per conuersionem rationis, & conuertendo, excessus C, A, ad C, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem denominatam per A; sed C, ad planum AC, est ut unitas ad A, uel ut unitas denominata per A, ad unitatem; ergo ex æquali excessus C, A, ad planum AC, maiorem habet proportionem quàm B, ad unitatem: est autē excessus C, A, ad planum AC, ut excessus C, A, denominatus plano AC, ad unitatem; ergo excessus CA, denominatus plano AC, ad unitatem habet maiorem proportionem, quàm B, ad unitatem: Assumantur ex fractionibus dispositis in B, tot ut inter assumptas habeatur ea, in cuius denominatione adhabetur magnitudo C; & assumptarum sit aggregatum H: constat H, esse portionem B; & esse æqualem excessui C, A, denominato plano AC; & propterea H, ad unitatem habere proportionem maiorem quàm B; & H, maiorem esse B, partem toto; quod est absurdum: non ergo B, sunt minores unitate denominata per A; sed neque maiores: ergo B, sunt æquales unitati denominatæ per A. Quod, &c.

Pr. 7. I.

Theor. 7. Prop. 7.

Dispositis quomodolibet magnitudinibus procedentibus in infinitum, ut assumptis totidem semper secundum aliquem numerum singula excedant singulas precedentes pariter totidem sumptas ordinis eiusdem; ex denominatione huiusmodi excessuum ma-

P 2

gnitu-

gnitudinis ordinis eiusdem per productum
tū ex magnitudinibus, quarum sunt
excessus, tū etiam ex intermedijs sunt
fractiones, quæ in infinitum dispositæ, &
aggregatæ sunt æquales unitati denomina-
tæ productō totidem magnitudinum, quæ
sunt in principio dispositionis.

A. B — C — D — E — — — O — P — R — S —
F —————
I. G — H ————— V ———
K —————

S It A, dispositio magnitudinum in infinitum proce-
dentium, ut sumptis exempli gratia ternis quibusli-
bet, singulæ excedant singulas præcedentes ordinis
eiusdem; & sint primæ tres B, C, D; & quarta sequens
E; & sit F, dispositio infinitarum fractionum, in quibus
prædicti excessus denominantur productis ex magnitu-
dinibus tū excedentibus, tū intermedijs; quarum fra-
ctionum prima est excessus E, B, denominatus productō
BCDE. Dico quod F, æqualis est unitati denominatæ
productō BCD. Est enim F, extensionis finitæ: nam as-
sumptis in F, quotlibet à prima in denominatione ulti-
mæ assumptarum adhibeantur O, P, R, S, magnitudines
in A, dispositæ; & ex ternis consequentibus BCD, CDE,
alijsq; deinceps dispositis in A, utpote etiam ex P R S,
fiant producti G, H, & deinceps alij, utpote etiam V;
quorum dispositio in infinitum sit I; constar assumptas
æquales esse differentiæ V, G, denominatæ plano V, G,
& ad unitatem se habere ut differentia V, G, ad planum
GV;

Pr. 1.3.

G V; & conuertendo, vnitatem esse ad assumptas vt Pr. 15. 1.
 planum GV, ad differentiam V, G: sed maiorem habet
 proportionem planum GV, ad differentiam V, G, quàm
 G, ad vnitatem; vel quàm vnitas ad vnitatem denomi-
 natam per G; ergo vnitas ad assumptas maiorem habet
 proportionem quàm ad vnitatem denominatam per G;
 & propterea quotlibet assumptæ sunt minores vnitatem
 denominata per G: ergo F, est finitæ extensionis. Pr. 15. 1.
 terea differentia denominata planis in I, disponantur
 in serie K; quarum prima est excessus H, G, denomina-
 tus plano GH: & quoniam magnitudines A, procedunt
 in infinitum; etiam producti earundem I, procedunt in
 infinitum; ergo K, est extensionis finitæ; & æqualis Pr. 6. 3.
 est vnitati denominatæ per G: & cum G, sit productum
 B, in C D; & H, productum E, in C D; erit pla-
 num GH, productum BCDE, in C D: ergo GH, &
 planum GH, sunt homologa rationis eiusdem B, E, &
 producti BCDE: ergo excessus H, G, ad planum GH,
 est vt excessus E, B, ad productum BCDE; & fractio, in
 qua excessus H, G, denominatur plano GH, videlicet
 prima dispositarum in K, æqualis est fractioni, in qua
 excessus E, B, denominatur producto BCDE, videlicet
 primæ dispositarum in F: similiter demonstrabimus easdē
 singillatim magnitudines tū in K, tū in F, esse dispo-
 sitas, & sunt ambæ dispositiones K, & F, extensionis
 finitæ, vt probauimus; ergo K, & F, congruunt Ax. 2.
 inter se: cum ergo K, sit æqualis vnitati deno-
 minatæ G, videlicet producto B C D;
 etiam F, est æqualis vnitati deno-
 minatæ producto B C D.

Quod, &c.



Probl.

Probl. 1. Prop. 8.

Datis extremis inæqualibus, intermediam inuenire, cuius, & unius extremarum differentia plano denominata sit æqualis alijs data magnitudini, qua sit minor differentia extremarum plano denominata.

A. 8. G. 7. B. 3. E. $\frac{1}{2}$ F. $1\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{16}$ H. $\frac{4}{16}$ C. $\frac{5}{16}$

Datæ sint inæquales extremæ A, B; quarum differentia plano denominata sit C; & data sit alia magnitudo D, minor C. Opportet extremas A, B, intermediam inuenire; cuius, & A, differentia plano denominata sit æqualis D. Vel est A, maior B; vel minor: sit maior; & ex multiplicatione DA, fiat E; qui auctus unitate sit F; & per F, diuidendo A, fiat quotiens G. Dico, quod G, est intermedia A, B, & quod excessus A, G, plano denominatus est æqualis D. Quoniam G, multiplicando F, producit A; & multiplicando aggregatum E, & unitatis producit aggregatū plani GE, & G; est autem F, æqualis E, & unitati; igitur A, est æqualis plano GE, & G; & A, est maior G; ergo communi ablata G, excessus A, G, est æqualis plano GE; & diuidendo per G, excessus A, G, denominatus per G, est æqualis E; videlicet plano DA; & diuidendo per A, excessus A, G, plano denominatus est æqualis D: non est autem G, æqualis, neque minor B; nam excessus A, G, plano denomi-

nominatus, videlicet D, æqualis esset vel maior C, contrà hypothesim; ergo G, est intermedius A, B; & excessus A, G, plano denominatus est æqualis D. Sit A, minor B; & conuertendo, B, maior A; & quoniam D, est minor C; sit defectus H, & inueniatur E, intermedius B, A, vt excessus B, E, plano denominatus æqualis fiat H: quoniam A, E, B, sunt magnitudines continuè dispositæ; aggregatum differentiarum A, E; E, B, planis denominatarum est æquale C; videlicet aggregato D, H; est autem differentia E, B, plano denominata æqualis H; ergo residua differentia, videlicet defectus A, E, plano denominatus est æqualis D. Quod, &c.

Theor. 8. Prop. 9.

In continua dispositione magnitudinum infinitarum inter extremas quaspiam magnitudines ab una ad alteram procedentium, differentia planis denominata disposita in infinitum, & aggregata, sunt æquales vni differentia extremarum plano denominata.

A ——— D — E — B —	L — F — G —
C ——— ——— ——— ———	H ———
P ——— ——— ——— ———	N ———

S Int dispositæ quomodolibet magnitudines infinitæ in continua dispositione procedentes inter extremas

$A \text{ --- } D \text{ --- } E \text{ --- } B$ $L \text{ --- } F \text{ --- } G$
 $C \text{ --- } \text{ --- } \text{ --- } \text{ --- } \text{ ---}$ $H \text{ ---}$
 $P \text{ --- } \text{ --- } \text{ --- } \text{ ---}$ $N \text{ ---}$

- mas A, B, ab A, quæ sit in principio dispositionis ad B; & infinitæ differentiæ planis in dispositione denominatæ aggregentur in C; & sit L, differentia A, B; & ex denominatione L, per planum A B, fiat H. Dico, quod C, est æqualis H. Est enim C, extensionis finitæ: nam assumptis in C, quotlibet à prima in denominatione ultimæ assumptarum adhibeantur D, E, magnitudines inter
- Prop. 7. 1.** A, B, dispositæ: constat, quod assumptæ sunt æquales
- Prop. 7. 1.** differentiæ denominatæ plano AE; est autem differentia denominata plano AE, vñ cum differentia denominata plano EB, æqualis H; ergo differentia denominata plano AE, minor est H; & propterea quotlibet assumptæ sunt minores H: igitur C, est finitæ extensionis. Iam si C, non est æqualis H, necessario maior erit, vel minor: sit maior; & quoniam C, est maioris extensionis H; summi possunt ex magnitudinibus dispositis in C, aliquot à prima, vt impleant H: sumantur, & sit ipsarum multitudinis numerus F; qui vñitate adiecta fiat G; ergo C, sumptæ à prima in multitudine numeri G, sunt maiores H; quod est contrà superius demonstrata: non est ergo C, maior H. Sit minor; & inueniatur D, intermedia extremas A, B; vt differentia A, D, plano denominata sit æqualis C; ergo differentia A, D, est minor L: & quoniã ab A, ad B, sunt dispositæ magnitudines infinitæ; etiam differentiæ in ea dispositione sunt infinitæ; & simul compositæ sunt æquales vñ differentiæ extremarum L; ergo vel prima ex huiusmodi differentijs est maior differentia
- Pr. 16. 1.** A, D; vel si minor plures à prima sumptæ secundum aliquem numerum implent differentiam A, D; qui numerus vñitate

vnitate adiecta fiat N; ergo differentia in dispositione A, ad B, sumpta à prima secundum numerum N, sunt maiores differentia A, D: sumantur igitur secundum numerum N, magnitudines ab A, dispositae ad B, praeter A; & assumptarum sit vltima E; totidemque sumantur ex fractionibus dispositis in C; quarum aggregatum sit P: constat P, esse portionem ipsius C; & differentiam A, E, maiorem differentia A, D; & propterea differentiam A, E, plano denominatam, videlicet P, esse maiorem differentia A, D, plano denominata, videlicet C; ergo portio est maior toto; quod est absurdum: non est ergo C, minor H; sed neque maior: ergo C, est æqualis H. Quod, &c.

Prop. 7. 1.

Theor. 9. Propos. 10.

In continua dispositione magnitudinum infinitarum inter extremas à prima ad vltimam procedentium, differentia illarum, quae distant equali ordinis intervallo denominatae productis tum earumdem, quarum sunt differentia, tum etiam intermediarum, dispositae in infinitum, & aggregatae sunt aequales differentiae inter productum numeri laterum vnitate minoris ab ijs, quae sunt in principio dispositionis, & homogeneam potestatem ab vltima, denominata plano sub iisdem productis, & potestate.

Q

Sint

$A-I-K-M-O-S-T-D-E-B$
 C
 $L-F-G-H$
 $Q. V-X-Z-R$
 $Y-N-P$

S Int dispositæ quomodolibet magnitudines infinitæ in continua dispositione procedentes inter extremas A, B, ab A, I, K, M, O, quæ sint in principio dispositionis ad B; & infinitæ differentiæ illarum, quæ distant æquali ordinis intervallo, utpote semper binis relictis differentiæ A, M; I, O, &c. denominatæ productis AIKM, IKMO, &c. aggregentur in C; & sit Q, dispositio productorum numeri laterum unitate minoris AIK, IKM, KMO, &c. in qua quidem dispositione sit V, productum AIK; & R, potestas totidem laterum à B; differentia verò R, V, sit L; ex cuius denominatione per planum RV, fiat H. Dico quod C, est æqualis H. Est enim C, extensionis finitæ; nam assumptis in C, quotlibet à prima, in denominatione ultimæ assumptarum adhibeantur S, T, D, E, magnitudines inter A, B, dispositæ; & in dispositione Q, sint X, Z, producta STD, TDE: constat, quod assumptæ sunt æquales differentiæ denominatæ plano VZ; est autem differentia denominata plano VZ, una cum differentia denominata plano ZR, æqualis H; ergo differentia denominata plano VZ, minor est H; & propterea quotlibet assumptæ à prima ex dispositis in C, sunt minores H: igitur C, est finitæ extensionis. Iam si C, non est æqualis H; necessario maior erit, vel minor: sit maior; & quoniam C, est maioris extensionis H; sumi possunt ex magnitudinibus dispositis in C, aliquot à prima, ut impleant H: sumantur, & sit ipsarum multitudinis numerus F; qui unitate adiecta fiat G; ergo C, sumptæ à prima in multitudine numeri G, sunt maiores H, quod est contrà

Prop. 1. 3.

Prop. 7. 1.

Pr. 15. 1.

Pr. 16. 1.

Def. 10.

contrà superiùs demonstrata: nō est ergo C, maior H. Sit minor; & inueniatur X, intermedia extremas V, R, vt differentia V, X, plano denominata sit æqualis C; & intelligatur V, X, esse potestates ipsi R, homogeneæ, quarū radices inueniantur Y, S: quia V, est productus magnitudinū inæqualium, & continuè dispositarum A, I, K; constat quòd Y, est intermedia extremas A, K; & quia X, est intermedia extremas V, R; differentia V, X, est minor differentia, V, R; & differentia Y, S, minor est differentia Y, B; & ablata communi differentia Y, K; differentia K, S, minor est differentia K, B; & quoniā in dispositione K, ad B, sunt magnitudines infinitæ; etiam differentia sunt infinitæ; & simul sumptæ sunt æquales vni differentia extremarum K, B; ergo vel prima ex huiusmodi differentijs est maior differentia K, S; vel si minor, plures à prima sumptæ secundum aliquem numerum implent differentiam K, S; qui numerus vnitæ adiecta fiat N; ergo differentia in dispositione K, ad B, sumptæ à prima secundum numerum N, sunt maiores differentia K, S: Sumantur ergo secundum numerum N, magnitudines à K, dispositæ ad B, præter K; & assumptarum sit vltima T; quam sequantur alia duæ D, E; & in dispositione Q, sit Z, productum TDE; & quot sunt magnitudines assumptæ à K, vsque ad E, totidem sumantur ex fractionibus dispositis in C, à prima; quarum aggregatum sit P: constat P, esse portionem ipsius C; & differentiam K, T, esse maiorem differentia K, S; & addita communi differentia Y, K, differentiam Y, T, maiorem differentia Y, S; & propterea differentiam inter V, & homogeneam potestatem à radice T, maiorem differentia V, X; est autem differentia V, Z, maior differentia inter V, & homogeneam potestatem à radice T; ergo differentia V, Z, est multò maior differentia V, X, & ideo differentia V, Z, plano denominata maior est differentia V, X, plano denominata; videlicet

Prop. 3. 3.

Pr. 16. 1.

Def. 10.

Prop. 7. 1.

Q 2

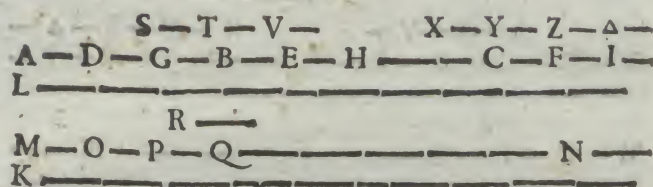
fra-

fractione C: est autem differentia V, Z, plano denomina-
ta æqualis P; ergo P, est maior C; portio toto; quod est
absurdum: non est ergo C, minor H; sed neque maior:
ergo C, est æqualis H. Quod, &c.

Theor. 10. Prop. 11.

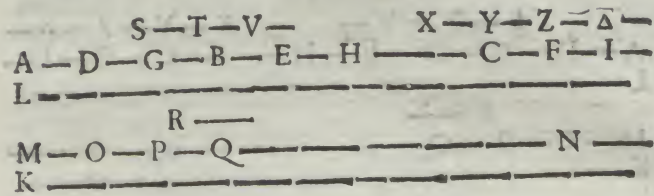
*Si plures continue dispositiones, in quibus dif-
ferentia sint similes, magnitudinum infinita-
rum ita componantur in unica dispo-
sitione, ut quæ sunt ordinis eiusdem sint
similiter ordinata; differentia in singulis di-
spositionibus eodem ordine sumpta, cum ijs,
quæ sunt in ipsarum dispositionum princi-
pijs, denominata productis tum earumdem,
quarum sunt differentia, tum etiam inter-
mediarum disposita in infinitum, & ag-
gregata sunt æquales uni differentia pro-
ductorum à primis, & ab ultimis extre-
mis, eorumdem productorum plano deno-
minata.*

Trium continuarum dispositionum ex magnitudi-
nibus infinitis inter binas extremas procedentium
prima sit ab A, per B, ad C; secunda à D, per E, ad F;
tertia à G, per H, ad I; in quibus differentia sint similes;
& quæ



& quæ componantur in vna dispositione ab A, per D, G, B, &c. ad I, ita vt primæ A, D, G, secundæ B, E, H, & reliquæ deinceps ordinis eiusdem, necnon ultimæ C, F, I, sint similiter ordinatæ; & singularum dispositionum differentiæ denominatæ productis in huiusmodi composita dispositione (vtpote differentia A, B, denominata producto ADGB; & differentia D, E, producto DGBE; & sic deinceps in infinitum) disponantur, & colligantur in L; & à primis ADG, & ultimis CFI, producantur M, & N. Dico, quòd L, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Est enim L, extensionis finitæ: nam assumptis in L, quotlibet à prima, in denominatione ultimæ assumptarum tres adhibeantur B, E, H, magnitudines inter A, I, dispositæ; & Q, sit productum BEH; & quoniam sunt continuæ dispositiones ABC, DEF, GHI; Ex Dem. Prop. 1. 3. continua est etiam dispositio MQN; & differentia M, Q, minor est differentia M, N; & differentia M, Q, plano Prop. 7. 1. denominata minor est differentia M, N, plano denominata: est autem differentia M, Q, plano denominata Prop. 1. 3. æqualis quotlibet assumptis in L; igitur quotlibet assumptæ in L, sunt minores differentia M, N, plano denominata; ergo L, est finitæ extensionis. Inter M, N, Pr. 15. 1. disponantur homogenea producta in dispositione ab A, ad I, vt fiant O, P, Q, producta DGB, GBE, BEH, & deinceps infinita; & eadem demonstratione, qua ostendimus Q, esse intermedium M, N; ostendemus etiam O, P, & reliqua

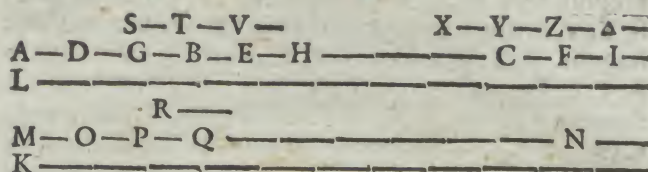
Q 3



Ex doctrina
Logarithmorum.

reliqua producta esse intermedia M, N; necnon O, P, esse intermedia M, Q; & sic dispositionem huiusmodi productorum inter M, N, esse continuam: sumatur præterea quælibet magnitudo R, inter M, N; & analogia (videlicet proportionum proportio) proportionis M, ad N, ad proportionem M, ad R, eadem esse concipiatur singularum proportionum A, ad C; D, ad F; & G, ad I, ad singulas proportiones A, ad S; D, ad T; & G, ad V, possibiles inueniri: & quoniam R, est inter M, N; si singulæ A, D, G, singulis C, F, I, sunt minores; ergo M, est minor N; & minor est proportio M, ad N, quàm M, ad R; & singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, sunt minores quàm singulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: sunt ergo singulæ C, F, I, singulis S, T, V, maiores: sunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & singularum A, D, G, ad singulas C, F, I, minoris inæqualitatis; ergo etiam proportiones singularum A, D, G, ad singulas S, T, V, sunt minoris inæqualitatis; & singulæ A, D, G, singulis S, T, V, minores. Si verò singulæ A, D, G, singulis C, F, I, sunt maiores; ergo M, est maior N; & maior est proportio M, ad N, quàm M, ad R; & singulæ proportiones A, ad C; D, ad F; G, ad I, sunt maiores, quàm singulæ A, ad S; D, ad T; G, ad V: sunt ergo singulæ C, F, I, singulis S, T, V, minores: sunt autem proportiones M, ad N; M, ad R; & singularum A, D, G, ad singulas C, F, I, maioris inæqualitatis; ergo propor-

proportiones etiam singularum A, D, G , ad singulas S, T, V , sunt maioris inæqualitatis; & singulæ A, D, G , singulis S, T, V , minores ergo in utroque casu singulæ S, T, V , sunt intermediae binas $A, C; D, F; G, I$; & differentia $A, S; D, T; G, V$, sunt minores differentiis $A, C; D, F; G, I$; & quoniam in singulis dispositionibus ab A , ad C ; à D , ad F ; à G , ad I , sunt magnitudines infinitæ; etiam differentia sunt infinitæ; & simul compositæ singulis extremarum differentiis $A, C; D, F; G, I$, sunt æquales; ergo vel primæ differentia in singulis huiusmodi dispositionibus differentiis $A, S; D, T; G, V$, sunt maiores; vel si minores, plures à primis assumptæ Pr. 16. 1. secundum aliquos numeros implent differentias $A, S; D, T; G, V$; qui numeri singulis unitatibus adiectis fiant X, Y, Z ; quorum numerorum sit maximus Y ; cuius fiat multiplex Δ , iuxta numerum magnitudinum A, D, G : ergo differentia in singulis dispositionibus A , ad $C; D$, Def. 10. ad $F; G$, ad I , sumptæ à primis iuxta singulos numeros X, Y, Z , sunt maiores differentiis $A, S; D, T; G, V$; & sumptæ iuxta numerum Y , sunt multò maiores iisdem differentiis $A, S; D, T; G, V$: igitur sumantur secundum numerum Y , magnitudines ab A , dispositæ ad C ; à D , ad F ; à G , ad I , post ipsas A, D, G ; & assumptarum sint ultimæ B, E, H ; quæ cum sint ordinis eiusdem reperiuntur in dispositione ab A , ad I , consequentes; & post easdem A, D, G , in ordine numeri Δ , & aliorum deinceps numerorum, qui sunt proximè maiores ipso Δ ; & pariter in dispositione productorum ab M , ad N , reperiuntur ipsorum BEH , productus Q , in eodem ordine numeri Δ , post M : quia singulæ differentia $A, B; D, E; G, H$, sunt singulis differentiis $A, S; D, T; G, V$, maiores; etiam differentia M, Q , maior est differentia inter M , & productum STV : & quia singulæ proportionibus A , ad $C; D$, ad $F; G$, ad I , ad singulas proportionibus



tiones A, ad S; D, ad T; G, ad V; & colligendo omnes
 ad omnes eandem habent analogiam (siue proportio-
 num proportionem) quæ est proportionis M, ad N, ad
 proportionem M, ad R; permutandoque, & conuertendo,
 sicut proportio M, ad N, æqualis est proportioni-
 bus A, ad C; D, ad F; G, ad I, ita proportio M, ad R,
 æqualis est proportionibus A, ad S; D, ad T; G, ad V; vi-
 delicet proportioni M, ad productum STV: ergo R, est
 æqualis producto STV; & differentia M, Q, maior est
 differentia M, R; ergo dispositio productorum M, O, P,
 Q, est continua magnitudinum infinitarum proceden-
 tium ab M, ad N: in continua ergo dispositione magni-
 tudinum infinitarum inter extremas quaspiam magnitu-
 dines ab M, ad N, procedentium, differentia planis
 denominata disponantur in infinitum, & aggregentur in
 Prop. 9. K; ergo K, est æqualis differentia M, N, plano denomi-
 nata: & quoniam M, est productum A, in DG; & O,
 productum B, in DG; erit planum MO, productum AD
 GB, in DG; ergo M, O, & planum MO, sunt homolo-
 ga rationis eiusdem A, B, & producti ADGB; ergo
 differentia M, O, ad planum MO, est ut differentia A,
 B, ad productum ADGB; & fractio, in qua differen-
 tia M, O, plano denominatur; videlicet prima disposi-
 tarum in K, est æqualis fractioni, in qua differentia A,
 B, denominatur producto ADGB; videlicet primæ dis-
 positarum in L: similiter demonstrabimus easdem sin-
 gillatim

gillatim magnitudines tùm in K, tùm in L, esse dispositas; & sunt ambæ dispositiones K, & L, extensionis finitæ, vt probauimus; ergo K, & L, congruunt inter Ax. 2. se: cum ergo K, sit æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ; etiam L, est æqualis differentiæ M, N, plano denominatæ. Quod, &c.

DEFINITIONES.

Exposita rationali, & datis quolibet, si rationalis ad aliam, quæ inuenitur habeat proportionem compositam ex proportionibus eiusdem rationalis ad singulas datas; vocetur inuenta, productus datarum.

Et data linea, dicantur, latera, producti.

Exposita rationali, & datis duabus alijs magnitudinibus; si vt prima datarum ad rationalem, ita fiat secunda ad aliam, quæ inuenitur; vocetur inuenta, fractio facta ex denominatione secunda per primâ.

Et ipsa secunda magnitudo, numerator fractionis.

Prima verò, denominator.

Et exposita rationalis, unitas appelletur.

Huius-

Huiusmodi definitiones in Arithmetici voluminis calce
appositas esse volui, vt faciliter quisq; possit Arithme-
tica Theoremata in Geometricos vsus conuer-
tere, & demonstrationes in quantitate
discreta expositas, in quantitate con-
tinua mutatis nominum inter-
pretationibus adhi-
bere.

Finis Libri Tertij.



Omnium calculis approbandam, immò albis signandam lapillis Arithmetica hanc Speculationem censuit Ovidius Montalbanus librorum Mathematicorum pro Eminentiss. & Reuerendiss. Principe Archiepiscopo Bononiae Card. Nicolao Ludouiso Censor.

V. D. Antonius Bon Vicinus Panit. pro eodem Eminentiss.

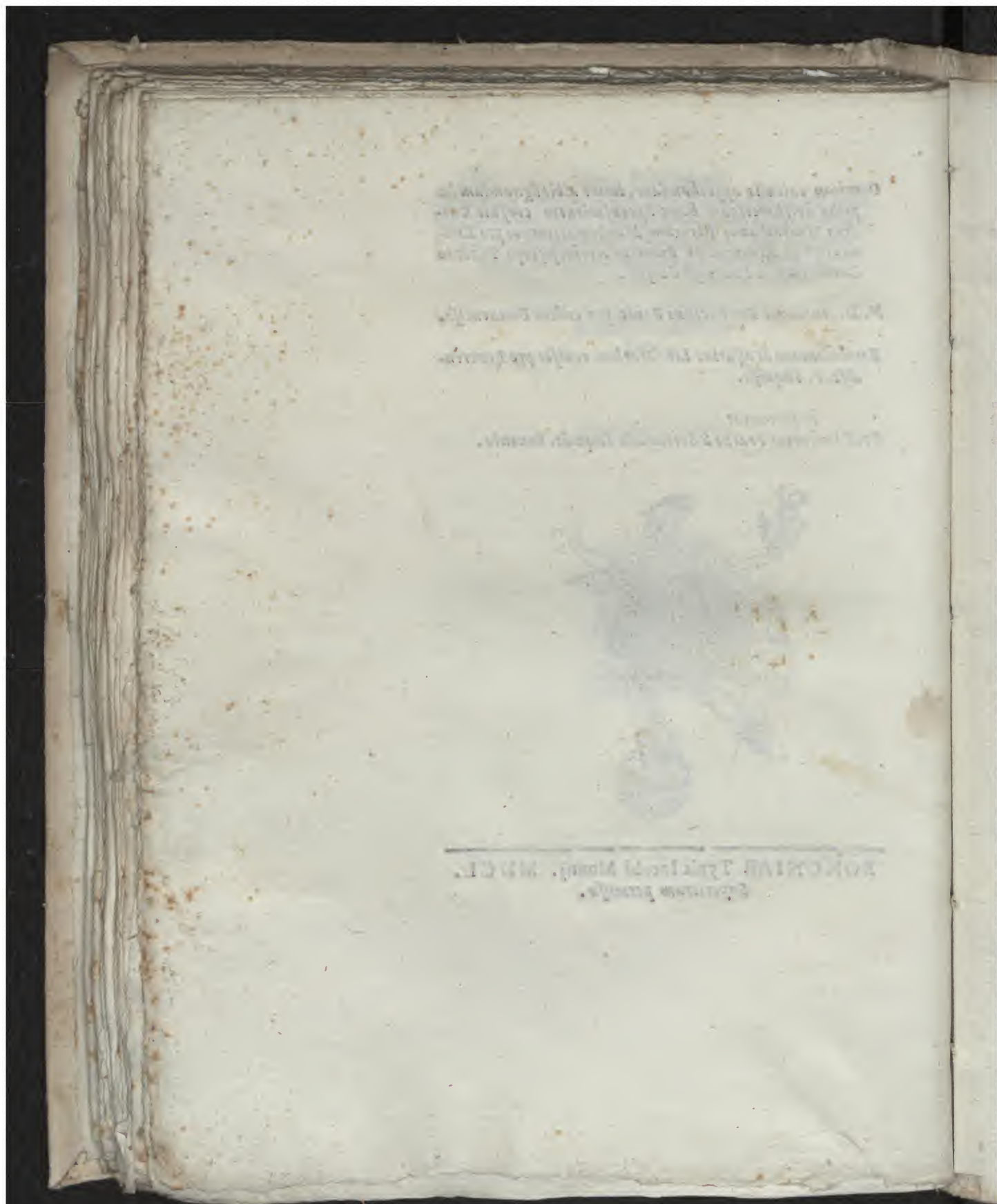
Bartholomaeus Massarius Lib. Mathm. reuisor pro Reuerendiss. P. Inquisit.

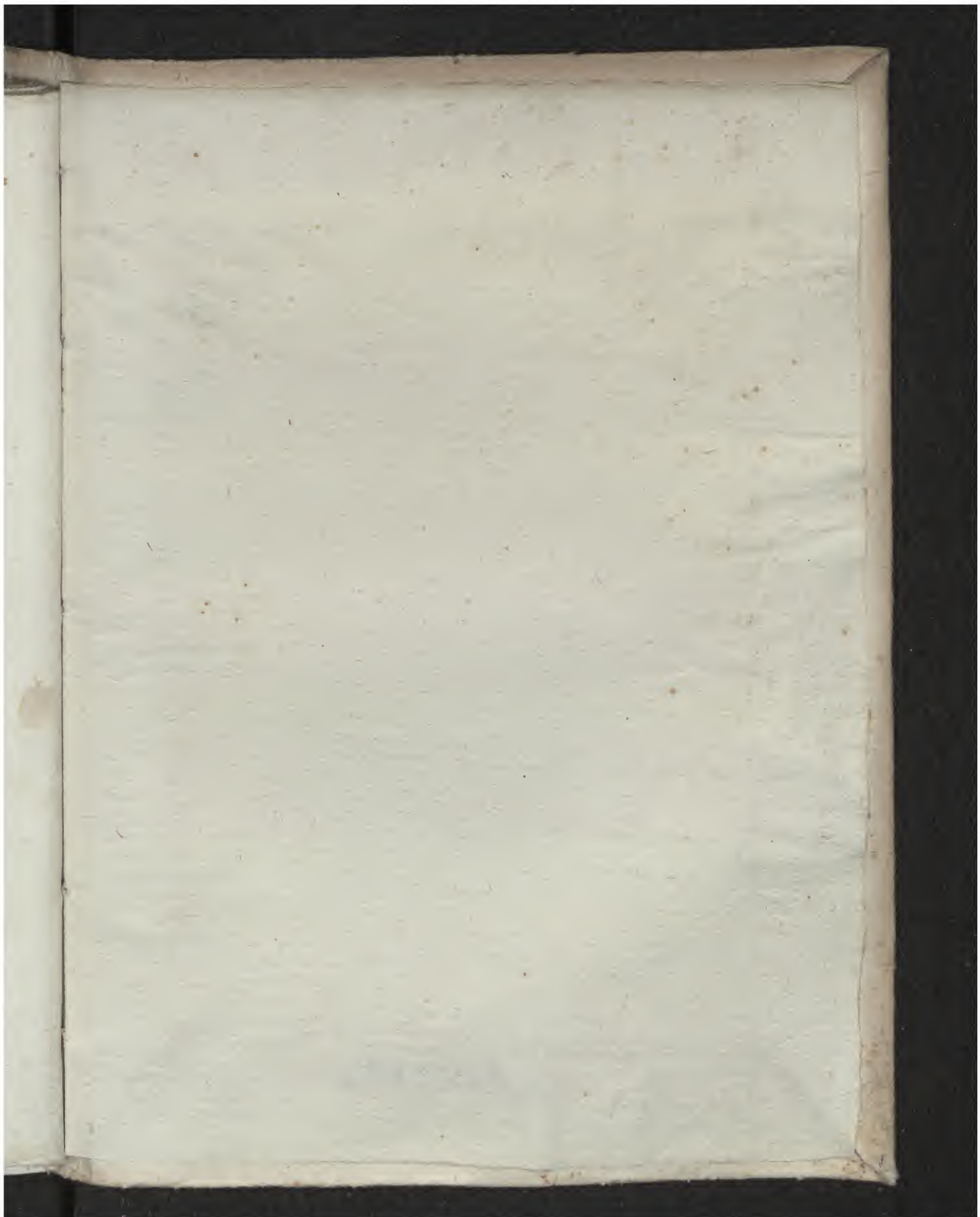
Imprimatur

Fr. Vincentius Pratus à Serraualle Inquisit. Bononiae.



*BONONIAE Typis Iacobi Montij. MDCL.
Superiorum permisso.*





005643770

